

معادلات الفيزياء الرياضية



ا. تيخونوف وا. سامارسكي

يتناول هذا الكتاب دراسة مسائل
الفيزياء الرياضية التي تؤول إلى معادلات
بالمشتقات الجزئية . وقد قسمت مادة الكتاب
إلى أبواب حسب أنماط هذه المعادلات .
بحيث تبدأ دراسة كل نمط منها بعمل أبسط
المسائل الفيزيائية التي تؤول إلى معادلة من
النمط موضع البحث . ويحرص المؤلفان على
مراعاة الدقة الرياضية في صياغة المسائل
وكذلك شمول التفسير الفيزيائي لمغزى النتائج
التي يحصل عليها . كما زود كل باب من
أبواب الكتاب بعدد من المسائل والأمثلة .
وقد تم تأليف الكتاب على أساس
محاضرات أُلقيت بكلية الفيزياء للجامعة
موسكو .



دار «میر» للطباعة والنشر

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том I

Издательство «Наука»
Москва

ا. تيخونوف وا. سافاركي

معادلات الفيزياء الرياضية

١

ترجمة

الدكتور أحمد صادق القرمانى

دار « مير » للطباعة والنشر

الاتحاد السوفيتى - موسكو

إلى القراء الأعزاء

تصدر دار « مير » للطباعة والنشر الكتب العلمية والتكنيكية المختارة من أفضل المراجع الجامعية وكذلك الكتب العلمية المبسطة .

وبإمكانكم الحصول على أسماء هذه الكتب من الكatalogات التي تنشرها الدار باللغات العربية والإنجليزية والفرنسية والإسبانية .

ويسر دار « مير » أن تكتبوا إليها عن رأيكم في هذه الكتب ، حول مضمونها وترجمتها وأسلوبها ، وتكون شاكراً لكم لو أبديتم لها ملاحظاتكم وانطباعاتكم .

عنواننا : الاتحاد السوفيتي - موسكو ١١٠

بيري ريمسكي بيربولوك ٢

на арабском языке

© حقوق الترجمة إلى اللغة العربية محفوظة لدار « مير »

١٩٨٤

مقدمة

تقدم دار « مير » للطباعة والنشر هذا الكتاب في طرق الفيزياء الرياضية في جزأين وهو يعتبر مرجعاً موسعاً في هذا الموضوع لطلبة كليات الهندسة والعلوم وللمتخصصين في الفيزياء والرياضة التطبيقية والبحث والعلوم الهندسية .

إن موضوعات الفيزياء الرياضية لترتبط ارتباطاً وثيقاً بدراسة مختلف العمليات الفيزيائية كتلك التي تدرس في الهيدروديناميكا ونظرية المرونة والكهروديناميكا وغيرها . وتحتوى كل المسائل الرياضية الناشئة عند دراسة هذه العمليات على عناصر مشتركة كثيرة هي ما يشكل محتوى الفيزياء الرياضية ، مع توضيح الاختلافات بين كل عملية وأخرى التي توجد خاصة في مراحل بداية ونهاية العملية الفيزيائية . وتعتبر طرق البحث التي تميز هذا العلم طرقاً رياضية من حيث الجوهر .

وفي هذا الكتاب تدرس مسائل الفيزياء الرياضية التي تؤدي إلى معادلات تفاضلية جزئية . وقد رتبت أبواب الكتاب بحيث تناظر الأنماط الأساسية للمعادلات التفاضلية الجزئية وتبدأ دراسة كل نمط بالمسائل الفيزيائية المبسطة التي تؤدي إلى المعادلات من هذا النمط .

ويهتم الكتاب بالصياغة الرياضية للمسائل والشرح الدقيق والوافي لحل المسائل وتفسير النتائج تفسيراً فيزيائياً .

والجزء الأول من الكتاب يحتوي على دراسة الأنماط الأساسية للمعادلات التفاضلية الجزئية والمسائل الفيزيائية المؤدية إليها وطرق حلها ويركز بشكل أساسي على المسائل المصاغة في بعد واحد أو بعدين (في المستوى) . وفي نهاية كل باب توجد مسائل تهدف إلى تمرين القارئ على اكتساب المهارة اللازمة لحل المسائل بنفسه ، كما توجد ملاحق تعطى فيها أمثلة على تطبيق الطرق المشروحة لحل مختلف مسائل الفيزياء والتكنيك .

الباب الأول

تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية

يؤدي الكثير من مسائل الفيزياء الرياضية إلى معادلات تفاضلية جزئية .
وتصادفنا المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية أكثر من غيرها . وفي هذا
الباب سندرس تصنيف هذه المعادلات .

بند ١ - تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية

فقرة ١ : المعادلات التفاضلية في متغيرين مستقلين . نورد التعريفات اللازمة .
المعادلة في المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية في متغيرين مستقلين x, y هي العلاقة
بين الدالة المجهولة $u(x, y)$ ومشتقاتها الجزئية حتى الرتبة الثانية بما في ذلك المشتقات
من الرتبة الثانية نفسها * :

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

وبالمثل تكتب المعادلة في حالة عدد أكبر من المتغيرات المستقلة .
والمعادلة تسمى خطية بالنسبة للمشتقات من الرتب العليا إذا كانت على
الصورة :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1)$$

حيث a_{11}, a_{12}, a_{22} - دوال في x و y .

* نستخدم هنا الرموز التالية للمشتقات

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \dots$$

وإذا كانت المعاملات a_{11}, a_{12}, a_{22} تعتمد ليس فقط على x, y وإنما هي مثل F_1 دوال في x, y, u, u_x, u_y فإن مثل هذه المعادلة تسمى بمعادلة شبه خطية.

وتسمى المعادلة خطية إذا كانت خطية بالنسبة إلى المشتقات من الرتب العليا u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} وبالنسبة إلى الدالة u ومشتقاتها الأولى u_x, u_y أيضاً :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0 \quad (2)$$

حيث $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ - دوال فقط في x و y .

وإذا كانت معاملات المعادلة (2) لا تعتمد على x و y فإنها تكون عبارة عن معادلة خطية بمعاملات ثابتة. والمعادلة تسمى متجانسة إذا كانت $f(x, y) = 0$.

وبواسطة تحويل المتغيرات :

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

الذى يسمح بتحويل عكسى نحصل على معادلة جديدة تكافئ المعادلة الأصلية. ومن الطبيعي أن نطرح السؤال التالى : كيف نختار ξ و η بحيث تصبح للمعادلة في هذين المتغيرين أبسط صورة ؟

في هذه الفقرة سنجيب على هذا السؤال للمعادلات الخطية بالنسبة للمشتقات من الرتب العليا على الصورة (1) في المتغيرين المستقلين x و y :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

وبتحويل المشتقات إلى المتغيرين الجديدين نحصل على :

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_{\xi}\xi_x + u_{\eta}\eta_x, \\ u_y &= u_{\xi}\xi_y + u_{\eta}\eta_y, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_{xx}, \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_{xy}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_{yy}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

وبالتعويض بقيم المشتقات من (3) في المعادلة (1) نحصل على :

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \quad (4)$$

حيث

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\ \bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\xi_y + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\ \bar{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2. \end{aligned}$$

أما الدالة \bar{F} فلا تعتمد على المشتقات الثانية. ونشير إلى أنه إذا كانت المعادلة الأصلية خطية أى أن :

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f,$$

فإن \bar{F} تكون على الصورة

$$\bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1u_\xi + \beta_2u_\eta + \gamma u + \delta,$$

أى تظل المعادلة خطية*

نختار المتغيرين ξ, η بحيث يصبح المعامل \bar{a}_{11} مساوياً للصفر. ندرس المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى :

$$a_{11}x_x^2 + 2a_{12}x_xx_y + a_{22}x_y^2 = 0. \quad (5)$$

نفرض أن $z = \varphi(x, y)$ حل خاص ما لهذه المعادلة. فإذا وضعنا $\xi = \varphi(x, y)$ فإنه من الواضح أن المعامل \bar{a}_{11} يكون مساوياً للصفر. وبذلك ترتبط المسألة المذكورة أعلاه المتعلقة باختيار متغيرين مستقلين جديدين بحل المعادلة (5).

نثبت المأخوذتين (Iemmas) التاليتين :

١ - إذا كانت $z = \varphi(x, y)$ حلاً خاصاً للمعادلة

$$a_{11}x_x^2 + 2a_{12}x_xx_y + a_{22}x_y^2 = 0,$$

نشير إلى أنه إذا كان تحويل المتغيرات خطياً فإن $\bar{F} = F$ وذلك لأن المشتقات الثانية بالمتغيرين ξ و η في العلاقات (3) تكون في هذه الحالة مساوية للصفر ولا تحصل \bar{F} على حدود إضافية من تحويل المشتقات الثانية.

فإن العلاقة $\varphi(x, y) = C$ تكون عبارة عن تكامل عام للمعادلة التفاضلية العادية

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0. \quad (6)$$

٢- إذا كانت $\varphi(x, y) = C$ تكاملاً عاماً للمعادلة التفاضلية العادية

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0,$$

فإن الدالة $z = \varphi(x, y)$ تحقق المعادلة (5).

نثبت المأخوذة الأولى. حيث إن الدالة $z = \varphi(x, y)$ تحقق المعادلة (5) فإن المتساوية

$$a_{11} \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + a_{22} = 0 \quad (7)$$

تعتبر متطابقة : فهي تتحقق لجميع x, y في تلك المنطقة التي يعطى فيها الحل .
والعلاقة $\varphi(x, y) = C$ تعتبر تكاملاً عاماً للمعادلة (6) إذا كانت الدالة المحددة من العلاقة الضمنية $\varphi(x, y) = C$ تحقق المعادلة (6) . نفرض أن

$$y = f(x, C)$$

هي هذه الدالة ، عندئذ يكون

$$\frac{dy}{dx} = - \left[\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)} \right]_{y=f(x, C)} \quad (8)$$

حيث يشير القوسان والرمز $y = f(x, C)$ إلى أن المتغير y في الطرف الأيمن للمتساوية (8) لا يعتبر متغيراً مستقلاً ، وإنما تكون له قيمة مساوية $f(x, C)$.
ومن هنا يتبع أن $y = f(x, C)$ تحقق المعادلة (6) لأن

$$\begin{aligned} a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} &= \\ &= \left[a_{11} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + a_{22} \right]_{y=f(x, C)} = 0, \end{aligned}$$

وذلك لأن الصيغة في القوسين المربعين تساوى الصفر لجميع قيم x, y وليس فقط عندما $y = f(x, C)$.

نثبت المأخوذة الثانية . نفرض أن $\varphi(x, y) = C$ هو التكامل العام للمعادلة (6) . نثبت أن :

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \quad (7')$$

لأية نقطة (x, y) . نفرض أن (x_0, y_0) نقطة ما معطاة . وإذا أثبتنا أن في هذه النقطة تتحقق المتساوية (7') فإنه سيتبع من هنا وفقاً للطابع الاختياري للنقطة (x_0, y_0) ان المتساوية (7') هي متطابقة وان الدالة $\varphi(x, y)$ تعتبر حلاً للمعادلة (7') . نعد من النقطة (x_0, y_0) منحنى تكاملياً للمعادلة (6) وذلك بفرض $\varphi(x_0, y_0) = C_0$ وبدراسة المنحنى $y = f(x, C_0)$. من الواضح أن $y_0 = f(x_0, C_0)$. ويكون لدينا لجميع نقط هذا المنحنى مايلي :

$$\begin{aligned} a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} &= \\ &= \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} \right]_{y=f(x, C_0)} = 0. \end{aligned}$$

وبفرض أن $x = x_0$ في المتساوية الأخيرة نحصل على :

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0, y_0) + 2a_{12}\varphi_x(x_0, y_0)\varphi_y(x_0, y_0) + a_{22}\varphi_y^2(x_0, y_0) = 0,$$

وهو المطلوب إثباته * .

والمعادلة (6) تسمى بالمعادلة المميزة للمعادلة (1) ، وتسمى تكاملاتها بالمميزات .

وبفرض أن $\varphi(x, y) = \text{const}$ حيث $\varphi(x, y) = \text{const}$ هو التكامل العام للمعادلة (6) نجعل بذلك معامل u_{11} مساوياً للصفر . وإذا كان $\varphi(x, y) = \text{const}$ تكاملاً عاماً آخر للمعادلة (6) لا يعتمد على $\varphi(x, y)$ فإننا إذا فرضنا أن $\eta = \varphi(x, y)$ نجعل معامل u_{11} يساوى الصفر أيضاً .

• الارتباط الثابت بين المقادلتين (5) و (6) يكافئ الارتباط المعروف بين المعادلة التفاضلية الخطية في المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى وبين مجموعة المعادلات التفاضلية العادية . ويمكن التأكد من ذلك بتحليل الطرف الأيسر للمعادلة (5) إلى حاصل ضرب صيغتين تفاضليتين خطيتين (انظر كتاب ستيايوف والمعادلات التفاضلية طبعة دار «مير») .

والمعادلة (6) تحلل إلى معادلتين :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (10)$$

وتحدد إشارة الصيغة تحت الجذر نوع المعادلة

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0. \quad (1)$$

ونسى هذه المعادلة في النقطة M بالمعادلة من النمط الزائدى إذا كان $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ في النقطة M ومن النمط الناقصى إذا كان $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ في النقطة M ومن النمط المكافئ إذا كان $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ في النقطة M .*

وليس من الصعب التحقق من صحة العلاقة

$$D = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y \quad \text{حيث} \quad \bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2$$

التي تنتج منها لا متغيرة (ثبات) نوع المعادلة عند تحويل المتغيرات لأن المحدد الدالى (الجاكويان) D لتحويل المتغيرات لا يساوى الصفر. وقد تنمى المعادلة الواحدة إلى أنماط مختلفة في النقط المختلفة من منطقة تعريفها.

ندرس المنطقة G التي يكون للمعادلة في جميع نقطها نفس النمط الواحد. وير بكل نقطة من نقط المنطقة G مميزتان ، علماً بأن المميزتين للمعادلات من النمط الزائدى (الزائدية) تكون حقيقتين ومختلفتين ، أما للمعادلات من النمط الناقصى (الناقصى) فتكون المميزتان مركبتين ومختلفتين ، وللمعادلات من النمط المكافئ (المكافئة) فتكون المميزتان حقيقتين ومنطبقتين على بعضها .

ندرس بالتفصيل كل حالة من هذه الحالات على انفراد .

١ - للمعادلة من النمط الزائدى يكون $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ ويكون الطرفان

* هذه المصطلحات مستعارة من نظرية المنحنيات من الرتبة الثانية .

الأيتمان للمعادلتين (9) و (10) حقيقيين ومختلفين. والتكاملان العامان لها
 $\varphi(x, y) = C$, $\psi(x, y) = C$ يحددان عائلتين حقيقتين من المميزات.
 بفرض أن

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (11)$$

نحول المعادلة (4) بعد القسمة على معامل $u_{\xi\eta}$ إلى الصورة :

$$\Phi = -\frac{\bar{F}}{2a_{12}} \quad \text{حيث} \quad u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta})$$

وهذه هي ما يسمى بالصورة القياسية لمعادلات النمط الزائدي*

وكثيراً ما تستخدم صورة قياسية أخرى. نضع

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta,$$

أي أن

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

* لكي يصبح من الممكن إدخال المتغيرين الجديدين ξ, η بدلالة الدالتين φ, ψ يجب التأكد من
 استقلال هاتين الدالتين عن بعضها. والشرط الكافي لذلك هو أن يساوى المحدد الدالي للناظر صفراً. نفرض
 أن المحدد الدالي

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$$

يساوى الصفر في نقطة ما M . عندئذ يكون صحيحا التاسب بين صفى هذا المحدد أى أن :

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{\psi_x}{\psi_y},$$

ولكن ذلك مستحيل لأن

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \\ (a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0)$$

(وعند ذلك نحق أن نعتبر a_{11} هو a_{11} وهو أمر لا يعد تحليلاً لعمومية المسألة). ومن ثم أثبتت استقلالية الدالتين
 φ, ψ عن بعضها.

حيث α, β متغيران جديداً . عندئذ يكون

$$u_{\xi} = \frac{1}{2}(u_{\alpha} + u_{\beta}), \quad u_{\eta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha} - u_{\beta}), \quad u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$$

ونتيجة لذلك تأخذ المعادلة (4) الصورة :

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1 \quad (\Phi_1 = 4\Phi).$$

٢- للمعادلات من النمط المكافئ يكون $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ ، وتنطبق المعادلتان (9) و (10) فنحصل على تكامل عام واحد للمعادلة (6) :

$$\varphi(x, y) = \text{const}.$$

نضع في هذه الحالة :

$$\xi = \varphi(x, y) \quad , \quad \eta = \eta(x, y).$$

حيث $\eta(x, y)$ أية دالة لا تعتمد على φ . وعند ذلك الاختيار للمتغيرين يكون المعامل

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (V\bar{a}_{11}\xi_x + V\bar{a}_{22}\xi_y)^2 = 0,$$

وذلك لأن $a_{12} = V\bar{a}_{11}V\bar{a}_{22}$ ، ومن هنا يتبع أن

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = \\ &= (V\bar{a}_{11}\xi_x + V\bar{a}_{22}\xi_y)(V\bar{a}_{11}\eta_x + V\bar{a}_{22}\eta_y) = 0. \end{aligned}$$

وبعد قسمة طرفي المعادلة (4) على معامل $u_{\eta\eta}$ نحصل على الصورة القياسية للمعادلة من النمط المكافئ

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) \quad \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}} \right).$$

وإذا لم تدخل u_{ξ} في الطرف الأيمن فإن هذه المعادلة تصبح معادلة تفاضلية عادية تعتمد على ξ كبارامتر.

٣- للمعادلة من النمط الناقصى يكون $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ ويكون الطرفان الأيمنان للمعادلتين (9) و (10) مركبين . نفرض أن

$$\varphi(x, y) = C$$

هو التكامل المركب للمعادلة (9) ، عندئذ يكون

$$\varphi^*(x, y) = C$$

حيث φ^* الدالة المرافقة للدالة φ ، وهى عبارة عن التكامل العام للمعادلة المرافقة (10) . نستقل إلى المتغيرات المركبة بفرض

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi^*(x, y).$$

عندئذ تتحول المعادلة من النمط الناقصى إلى نفس الصورة التى تتحول إليها المعادلة الزائدية .

ولكى لا نتعامل مع المتغيرات المركبة ندخل متغيرين جديدين α, β يساويان :

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}$$

ومن ثم يكون

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta.$$

وفى هذه الحالة يكون

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 &= \\ &= (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) + \\ &+ 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0, \end{aligned}$$

أى أن

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}, \quad \bar{a}_{12} = 0.$$

وتأخذ المعادلة (4) بعد قسمة طرفيها على معامل $u_{\alpha\alpha}$ الصورة*

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \quad \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{11}} \right).$$

* تعتبر مثل هذه التحويلات قانونية فقط فى تلك الحالة عندما تكون معاملات المعادلة (1) دوال تحليلية . بالفعل فإذا كان $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ فإن الطرفين الأيمنين للمعادلتين (9) و (10) مركبان . وبالتالي يجب أن تكون للدالة η قيم مركبة . ويمكن التحدث عن حل هذه المعادلات فقط عندما تكون للمعاملات $a_{12}(x, y)$ معرفة لقيم u المركبة . وعند تحويل المعادلات الناقصية إلى الصورة القياسية سنكتفى بجالة المعاملات التحليلية .

وبذلك فوقاً لإشارة الصيغة $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ توجد الصور القياسية التالية للمعادلة (1) :

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0 \text{ (النمط الزائدى) : } u_{xx} - u_{yy} = \Phi \text{ أو } u_{xy} = \Phi$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0 \text{ (النمط الناقصى) : } u_{xx} + u_{yy} = \Phi$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \text{ (النمط المكافئ) : } u_{xx} = \Phi$$

فقرة ٢ : تصنيف المعادلات من الرتبة الثانية في عدة متغيرات مستقلة .
ندرس المعادلة الخطية ذات المعاملات الحقيقية :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu + f = 0 \quad (a_{ij} = a_{ji}), \quad (12)$$

حيث a, b, c, f هي دوال في x_1, x_2, \dots, x_n . ندخل متغيرات مستقلة جديدة ξ_k . بفرض أن

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k=1, \dots, n).$$

عندئذ يكون

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n u_{\xi_k} a_{ik}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_{\xi_k \xi_l} a_{ik} a_{jl} + \sum_{k=1}^n u_{\xi_k} (\xi_k)_{x_i x_j},$$

حيث

$$a_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

وبالتعويض بصيغ المشتقات في المعادلة الأصلية نحصل على :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{a}_{kl} u_{\xi_k \xi_l} + \sum_{k=1}^n \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu + f = 0$$

حيث

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ik} a_{jl}, \quad \bar{b}_k = \sum_{i=1}^n b_i a_{ik} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\xi_k)_{x_i x_j}.$$

ندرس الصورة التريعية

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^0 y_i y_j \quad (13)$$

التي تساوى معاملاتها المعاملات a_{ij} للمعادلة الأصلية في نقطة ما $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$.
ويأجاء التحويل الخطي التالي للمتغير y :

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \eta_k,$$

نحصل للصورة التربيعية على صيغة جديدة :

$$\bar{a}_{ij}^0 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik}^0 a_{jl}^0 a_{kl}, \quad \text{حيث} \quad \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l$$

وبذلك تتغير معاملات الجزء الرئيسى من المعادلة مثل تغير معاملات الصورة التربيعية عند التحويل الخطي .

وكما هو معلوم ، يمكن ، باختيار تحويل خطي مناسب ، تحويل المصفوفة (a_{ij}^0) للصورة التربيعية إلى الصورة القطرية التي يكون فيها

$$|\bar{a}_{ii}^0| = 0 \quad \text{أو} \quad |\bar{a}_{ii}^0| = 1$$

$$\bar{a}_{ij}^0 = 0 \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n).$$

ووفقاً لقانون القصور يكون عدد المعاملات \bar{a}_{ii}^0 الموجبة والسالبة والمساوية للصفر في الشكل القياسي للصورة التربيعية عدداً لا متغيراً بالنسبة للتحويل الخطي .

والمعادلة (12) في النقطة M_0 تسمى بالمعادلة من النمط الناقص إذا كانت كل المعاملات \bar{a}_{ii}^0 ذات إشارة واحدة ، وتسمى بالمعادلة من النمط الزائدى (أو النمط الزائدى الاعتيادى) إذا كان $n-1$ من المعاملات \bar{a}_{ii}^0 لها إشارة واحدة ومعامل واحد إشارته مضادة لها . وتسمى المعادلة بالمعادلة من النمط فوق الزائدى (ultra - hyperbolic) إذا كان من بين \bar{a}_{ii}^0 يوجد m معامل لها إشارة واحدة ، و $n-m$ معامل لها إشارة مضادة $(m, n-m > 1)$. وتسمى المعادلة بالمعادلة من النمط المكافئ إذا كان ولو معامل واحد من المعاملات \bar{a}_{ii}^0 مساوياً للصفر .

نختار المتغيرات المستقلة الجديدة ξ_i بحيث يكون في النقطة M_0 :

$$a_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = a_{ik}^0,$$

حيث α_{ik}^0 هي معاملات التحويل التي تحول الصورة التريعية (13) إلى الصورة القياسية (على سبيل المثال بفرض أن $\xi_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ik}^{(0)} x_i$) فيتبع أن المعادلة في النقطة M_0 وفقاً لنمطها تتحول إلى إحدى الصور القياسية التالية :

$$(النمط الناقص) \quad u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} + \Phi = 0$$

$$(النمط الزائد) \quad u_{x_1 x_1} = \sum_{i=2}^n u_{x_i x_i} + \Phi$$

$$(النمط فوق الزائد) \quad \sum_{i=1}^m u_{x_i x_i} = \sum_{i=m+1}^n u_{x_i x_i} + \Phi \quad (m > 1, n - m > 1)$$

$$(النمط المكافئ) \quad \sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{x_i x_i}) + \Phi = 0 \quad (m > 0)$$

ولن ندرس هنا التقسيم الأكثر تفصيلاً للمعادلات من النمط المكافئ إلى معادلات ناقصة مكافئة ، وزائدة مكافئة والخ .

وهكذا ، فإذا كانت المعادلة (12) تنتمي في نقطة ما M إلى نمط معين فإنه يمكن تحويلها إلى الصورة القياسية المناظرة في هذه النقطة .

ندرس بتفصيل أكثر موضوع إمكانية تحويل المعادلة إلى الصورة القياسية في جوار ما للنقطة M إذا كانت المعادلة في جميع نقط هذا الجوار تنتمي إلى نمط واحد .

إذا أردنا تحويل المعادلة في منطقة ما إلى الصورة القياسية اضطررنا إلى إخضاع الدوال $\xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ حيث $(i = 1, 2, \dots, n)$ إلى العلاقات التفاضلية $\bar{a}_{ki} = 0$ للقيم $k \neq i$ (أى يجب عندئذ أن تحقق الدوال ξ_i المعادلات التفاضلية $\bar{a}_{ki} = 0$ في حالة $k \neq i$) . وعدد هذه الشروط المساوى $n(n-1)/2$ يفوق العدد n للدوال التي ينبغي تحديدها ξ_i عندما يكون $n > 3$. وفي حالة $n = 3$ يمكن بوجه عام جعل العناصر غير القطرية في المصفوفة (\bar{a}_{ik}) مساوية للصفر غير أن العناصر القطرية قد تكون عند ذلك مختلفة فيما بينها .

وبالتالي فعند $n \geq 3$ لا يمكن تحويل المعادلة إلى الصورة القياسية في جوار النقطة M . وعند $n = 2$ يمكن جعل المعامل غير القطري الوحيد مساوياً للصفر وتحقيق شرط تساوى المعاملين القطريين لبعضها وهو ما تم إجراؤه في الفقرة ١ .

وإذا كانت معاملات المعادلة (12) ثابتة فإننا بتحويلنا هذه المعادلة (12) إلى الصورة القياسية في نقطة واحدة M نحصل على معادلة محولة إلى الصورة القياسية في كل منطقة تعريف المعادلة .

فقرة ٣ : الصورة القياسية للمعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة . في حالة المتغيرين المستقلين تكون المعادلة الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة على الصورة :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0. \quad (14)$$

وتناظرها معادلة مميزة ذات معاملات ثابتة . ولذا فإن الميزتين تكونان عبارة عن مستقيمين :

$$y = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} x + C_1, \quad y = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} x + C_2.$$

وبواسطة التحويل المناسب للمتغيرات تتحول المعادلة (14) إلى إحدى الصور البسيطة التالية :

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \quad (\text{النمط الناقص}) \quad (15)$$

$$u_{\xi\xi} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{أو} \\ \text{النمط الزائدي} \end{array} \right\} \quad (16)$$

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{أو} \\ \text{النمط المكافئ} \end{array} \right\} \quad (17)$$

$$u_{\xi\xi} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \quad (\text{النمط المكافئ}) \quad (17)$$

ولتبسيط المعادلة أكثر من ذلك ندخل بدلاً من u دالة جديدة v :

$$u = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \cdot v$$

حيث λ و μ ثابتان لم يحددا بعد . عندئذ يكون

$$u_\xi = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_\xi + \lambda v),$$

$$u_\eta = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_\eta + \mu v),$$

$$u_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v),$$

$$u_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v),$$

$$u_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi + \mu\eta} (v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v).$$

وبالتعويض بصيغ المشتقات في المعادلة (15) واختصار $e^{(\lambda\epsilon + \mu\eta)}$ نحصل على :

$$v_{\epsilon\epsilon} + v_{\eta\eta} + (b_1 + 2\lambda)v_{\epsilon} + (b_2 + 2\mu)v_{\eta} + (\lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c)v + f_1 = 0.$$

ونختار البارامترين λ و μ بحيث يكون معاملان ، وليكونا مثلاً معاملي المشتقتين الأوليين ، مساويين للصفر ($\lambda = -b_1/2$; $\mu = -b_2/2$) . ونتيجة لذلك نحصل على :

$$v_{\epsilon\epsilon} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0,$$

حيث γ ثابت يعبر عنه بدلالة b_1, b_2 و c ، $f_1 = f e^{(\lambda\epsilon + \mu\eta)}$. وبإجراء عمليات مماثلة لحالتى (16) و (17) نحصل على الصور القياسية التالية للمعادلات ذات المعاملات الثابتة :

$$\left. \begin{aligned} v_{\epsilon\epsilon} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 & \text{(النمط التامى)} \\ v_{\epsilon\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 & \text{(النمط الزائدى)} \\ v_{\epsilon\epsilon} - v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 & \text{(النمط الكافى)} \\ v_{\epsilon\epsilon} + b_2 v_{\eta} + f_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{أو}$$

وكما ذكرنا في الفقرة ٢ تتحول المعادلة ذات المعاملات الثابتة في حالة عدة متغيرات مستقلة

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu + f = 0$$

بواسطة التحويل الخطى للمتغيرات ، إلى الصورة القياسية لجميع نقاط تعريفها في نفس الوقت . وبإدخال دالة جديدة v بدلاً من u

$$u = v e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n}$$

وباختيار λ_i بالطريقة اللازمة يمكننا تبسيط صورة المعادلة مما يوصلنا إلى صورة قياسية مشابهة لحالة $n = 2$.

مسائل على الباب الأول

١ - عين المناطق التي تكون فيها المعادلة

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0$$

من النمط الزائدى ومن النمط الناقصى ومن النمط الكافى وحولها إلى الصورة القياسية في المنطقة التي تكون فيها زائبة .

٢ - حول إلى الصورة القياسية كلا من المعادلات :

- a) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$.
- b) $yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0$.
- c) $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} = 0$.
- d) $u_{xx} + (1+y)^2 u_{yy} = 0$.
- e) $xu_{xx} + 2\sqrt{xy}u_{xy} + yu_{yy} - u_x = 0$.
- f) $(x-y)u_{xx} + (xy-y^2-x+y)u_{xy} = 0$.
- g) $y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} + u_x = 0$.
- h) $\sin^2 yu_{xx} - e^{2x}u_{yy} + 3u_x - 5u = 0$.
- i) $u_{xx} + 2u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0$.

٣ - حول إلى الصورة القياسية وسط أكبر تبسيط ممكن المعادلة التالية :

$$au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0$$

حيث a, b, c ثوابت .

٤ - بإدخال الدالة $u = ue^{\lambda x + \mu y}$ واختيار البارامترين λ, μ بالطريقة اللازمة بسط كلا من المعادلات

التالية ذات المعاملات الثابتة :

- a) $u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0$.
- b) $u_{xx} = \frac{1}{\alpha^2} u_y + \alpha u + \beta u_x$.
- c) $u_{xx} - \frac{1}{\alpha^2} u_{yy} = \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u$.
- d) $u_{xy} = \alpha u_x + \beta u_y$.

الباب الثاني

المعادلات من النمط الزائدى

المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية من النمط الزائدى تصادفنا بكثرة فى المسائل الفيزيائية المتعلقة بالعمليات الذبذبية . والمعادلة من النمط الزائدى فى أبسط صورة لها

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

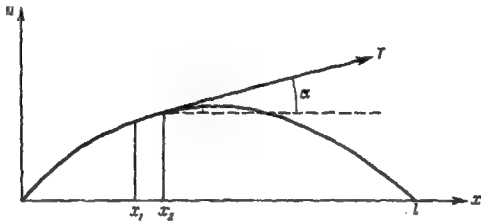
تسمى عادة بمعادلة ذبذبات الوتر . وفى هذا الباب ، كما فى الأبواب التالية ، سنكتفى بدراسة طائفة المعادلات الخطية .

بند ١ - أبسط المسائل المؤدية إلى معادلات من النمط الزائدى . صياغة المسائل الحديثة

فقرة ١ : معادلة الذبذبات المتعرضة للصغيرة للوتر . يمكن تحديد كل نقطة من نقط وتر طوله ١ بقيمة إحداثيها الأفقى x . ويمكن وصف عملية ذبذبة الوتر بواسطة إعطاء مواضع نقط هذا الوتر فى مختلف اللحظات الزمنية . ويكفى لتعيين وضع الوتر فى اللحظة الزمنية t إعطاء مركبات متجه إزاحة النقطة x $\{u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)\}$ فى اللحظة t .

سندرس أبسط أمثلة ذبذبات الوتر . فسنفترض أن إزاحات الوتر تقع فى مستوى واحد (x, u) وأن متجه الإزاحة u يكون عمودياً على المحور x فى أية لحظة زمنية . عندئذ يمكن وصف عملية الذبذبة بدالة واحدة $u(x, t)$ تميز الحركة الرأسية للوتر . وسنعتبر الوتر خيطاً مرناً قابلاً للامتلاء . وتلخص الصيغة الرياضية لمفهوم قابلية الوتر للامتلاء فى أن الاجتهادات الناشئة فى الوتر تكون دائماً متجهة فى اتجاه المماس لمقطعه الجانبي اللحظى (شكل ١) . ويعبر هذا الشرط عن أن الوتر لا يقاوم الامتلاء .

ويمكن حساب مقدار الشد الناشئ في الوتر نتيجة للمرونة وفقاً لقانون هوك .
وسندرس الذبذبات الصغيرة للوتر ونهمل مربع u_x بالمقارنة مع الواحد الصحيح .



شكل ١

نحسب بالاستعانة بهذا الشرط الاستطالة التي تحدث لجزء الوتر (x_1, x_2) .
وطول قوس هذا الجزء يساوى

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u_x)^2} dx \approx x_2 - x_1 = S.$$

وبذلك في حدود الدقة التي اصطالحنا عليها لا تحدث استطالة لأجزاء الوتر
خلال عملية الذبذبة . ومن هنا يتبع وفقاً لقانون هوك أن مقدار الشد T في كل
نقطة لا يتغير بتغير الزمن . نوضح كذلك أن الشد لا يعتمد على x ، أى أن

$$T(x) = T_0 = \text{const.}$$

نعين مسقطى الشد على المحورين u ، x (نرمز لها بالرمزين T_x ، T_u) :

$$T_x(x) = T(x) \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1 + (u_x)^2}} \approx T(x),$$

$$T_u(x) = T(x) \sin \alpha \approx T(x) \tan \alpha = T(x) u_x,$$

حيث α هي زاوية ميل المماس للمنحنى $u(x, t)$ على المحور x . وعلى الجزء (x_1, x_2)
تؤثر قوى الشد والقوى الخارجية وقوى القصور . ومجموع مساقط كل القوى على
المحور x يجب أن يكون مساوياً للصفر (نحن ندرس فقط الذبذبات المستعرضة) .

وحيث إن قوى القصور والقوى الخارجية تتجه وفقاً لافتراضنا على امتداد المحور u فإن

$$T(x_1) = T(x_2) \text{ أو } T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0 \quad (1)$$

ومن هنا وتبعاً لاختيارية x_1 و x_2 ينتج أن الشد لا يعتمد على x ، أى إنه لجميع قيم x و t يكون

$$T(x) \equiv T_0. \quad (2)$$

وبعد هذه الملاحظات التمهيدية التى أوردناها نستقل إلى استنباط معادلة الذبذبات المستعرضة للوتر. نستعين بالقانون الثانى لنيوتن. إن مركبة كمية حركة جزء الوتر (x_1, x_2) على المحور u تساوى

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t) \rho(\xi) d\xi,$$

حيث ρ الكثافة الخطية للوتر. نساوى التغير فى كمية الحركة خلال الفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi$$

بدفع القوى المؤثرة التى تتكون من الشد

$$T_0 u_x|_{x=x_2} - T_0 u_x|_{x=x_1}$$

فى النقطتين x_1 و x_2 والقوى الخارجية التى سنعتبرها موزعة توزيعاً متصلًا بالكثافة (بالحمل) $F(x, t)$ المؤثرة على وحدة الأطوال. ونتيجة لذلك نحصل على معادلة الذبذبات المستعرضة لعنصر من الوتر ، فى صورة تكاملية :

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \rho(\xi) d\xi = \\ = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (3) \end{aligned}$$

وللانتقال إلى المعادلة التفاضلية نفترض وجود واتصال المشتقات الثانية للدالة*
 $u(x, t)$. عندئذ تأخذ العلاقة (3) بعد تطبيق نظرية المتوسط مرتين الصورة :

$$u_{tt}(\xi^*, t^*) \rho(\xi^*) \Delta t \Delta x = \{T_0[u_{xx}(\xi^{**}, t^{**})] + F(\xi^{***}, t^{***})\} \Delta t \Delta x,$$

حيث

$$\xi^*, \xi^{**}, \xi^{***} \in (x_1, x_2), \quad a, t^*, t^{**}, t^{***} \in (t_1, t_2).$$

وباختصار $\Delta x \Delta t$ في الطرفين والانتقال إلى النهاية عندما $x_2 \rightarrow x_1, t_2 \rightarrow t_1$ نحصل
 على المعادلة التفاضلية للذبذبات المستعرضة للوتر :

$$T_0 u_{xx} = \rho u_{tt} - F(x, t). \quad (4)$$

وفي حالة الكثافة الثابتة $\rho = \text{const}$ نكتب هذه المعادلة عادة على الصورة :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}\right), \quad (5)$$

حيث

$$f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t) \quad (6)$$

هي كثافة القوة منسوبة إلى وحدة الكتل . وفي حالة انعدام القوة الخارجية نحصل
 على معادلة متجانسة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

أو

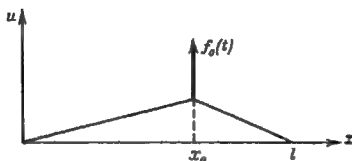
$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (y = at),$$

تصف الذبذبات الحرة للوتر . وهذه المعادلة تعتبر أبسط مثال للمعادلة من النمط
 الزائدى .

* بافتراض قابلية الدالة للتفاضل مرتين نصلح فعليا على أننا سندرس فقط تلك الدوال التي لها هذه
 الخاصية . وبذلك يرتبط مثل هذا الافتراض بتحديد نطاق الظواهر الفيزيائية محل البحث ولكنه لا يجرى في
 حد ذاته إقرارا بعدم وجود دوال تحقق المعادلة التكاملية للذبذبات دون أن يكون لها مشتقات ثانية . فتل
 هذه الدوال توجد ولها أهمية عملية كبيرة . انظر تفصيل ذلك في البند ٢ - فقرة ٧ .

وإذا أثرت في النقطة x_0 (حيث $x_1 < x_0 < x_2$) قوة مركزة $f_0(t)$ (شكل ٢) فإن المعادلة (3) تكتب في الصورة :

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi - \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau. \end{aligned}$$



شكل ٢

وحيث إن سرعات نقط الوتر تكون محدودة فإن التكاملين في الطرف الأيسر لهذه المتساوية يؤولان إلى الصفر عندما $x_2 \rightarrow x_0$ و $x_1 \rightarrow x_0$ وتأخذ المتساوية (3) الصورة :

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_0 + 0, \tau) - u_x(x_0 - 0, \tau)] d\tau = - \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau. \quad (7)$$

وبالاستعانة بنظرية المتوسط واختصار Δt في طرفي المتساوية الناتجة والانتقال بعد ذلك إلى النهاية عندما $t_2 \rightarrow t_1$ نحصل على :

$$u_x(x_0, t) \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = - \frac{1}{T_0} f_0(t).$$

ومن هنا يتضح أن المشتقات الأولى يحدث لها انفصال في نقطة تأثير القوة المركزة ولا يكون للمعادلة التفاضلية معنى. وفي هذه النقطة يجب أن يتحقق شرطا التوافق :

$$\left. \begin{aligned} u(x_0 + 0, t) &= u(x_0 - 0, t), \\ u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t) &= - \frac{1}{T_0} f_0(t), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

يعبر الشرط الأول منها عن اتصال الوتر ويعبر الثاني عن مقدار كسر الوتر في النقطة x_0 . والذي يعتمد على $f_0(t)$ والشد T_0 .

فقرة ٢ : معادلة الذبذبات الطولية للقضبان والأوتار. نكتب معادلات الذبذبات الطولية للوتر والقضيب والزنبرك في صورة واحدة . ندرس قضيبا يقع على الجزء $(0, l)$ من المحور x . ويمكن وصف عملية الذبذبات الطولية فيه بدالة واحدة $u(x, t)$ تعبر في اللحظة الزمنية t عن إزاحة النقطة التي كان إحداثياتها الأفقية في وضع الاتزان هو x^* . وفي حالة الذبذبات الطولية تحدث هذه الإزاحة على امتداد القضيب . وسنفترض أثناء استنباط المعادلة ان الشد الناشئ خلال عملية الذبذبة يتبع قانون هوك .

نحسب الاستطالة النسبية لعنصر القضيب $(x, x + \Delta x)$ في اللحظة t . وإحداثيات نهايتي هذا العنصر في اللحظة t هما

$$x + u(x, t), \quad x + \Delta x + u(x + \Delta x, t),$$

والاستطالة النسبية تساوى

$$\frac{[\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)] - \Delta x}{\Delta x} = u_x(x + \theta \Delta x, t)$$

$$(0 \leq \theta \leq 1).$$

* يسمى المتغير الهندسي x المأخوذ هنا بمتغير لاجرانج . وفي حالة متغيرات لاجرانج نميز كل نقطة طبيعية للقضيب خلال كل العملية الفيزيائية بنفس الإحداثى الهندسي x . والنقطة الطبيعية التي كانت تشغل في اللحظة الابتدائية (في حالة الاتزان) الموضع x توجد في أية لحظة تالية t في النقطة ذات الإحداثى $X = x + u(x, t)$. وإذا لبثنا نقطة هندسية ما A إحداثياتها هو X فإن تقاطعها مع خط x (ذات إحداثيات لاجرانج مختلفة x) ستوجد في هذه النقطة في اللحظات الزمنية المختلفة . وكثيرا ما نستخدم أيضا متغيرات أولير t و X حيث X الإحداثى الهندسي . فإذا كانت $U(X, t)$ إزاحة النقطة ذات إحداثى أولير X فإن إحداثى لاجرانج يكون مهاوليا

$$x = X - U(X, t).$$

ونورد مثلا لاستخدام إحداثيات أولير في الفقرة ٦ .

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\Delta x \rightarrow 0$ نجد أن الاستطالة النسبية في النقطة x تتحدد بالدالة $u_x(x, t)$. ووفقاً لقانون هوك يكون الشد $T(x, t)$ مساوياً

$$T(x, t) = k(x) u_x(x, t), \quad (9)$$

حيث $k(x)$ معامل يونج (معامل المرونة) في النقطة x ($k(x) > 0$) . وبلاستعانة بالنظرية المتعلقة بالتغير في كمية الحركة نحصل على المعادلة التكاملية للذبذبات

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \rho(\xi) d\xi = \\ = \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2) u_x(x_2, \tau) - k(x_1) u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (10)$$

حيث $F(x, t)$ كثافة القوة الخارجية في وحدة الأطوال .

نفرض وجود واتصال المشتقات الثانية للدالة $u(x, t)$. نطبق نظرية المتوسط ونجربى الانتقال إلى النهاية* عندما $\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow 0$ و $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$ فننتصل إلى المعادلة التفاضلية للذبذبات الطولية للقضيب**

$$[k(x) u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x, t). \quad (11)$$

وإذا كان القضيب متجانساً ($k(x) = \text{const}$, $\rho = \text{const}$) فإن هذه المعادلة تكتب على الوجه التالي :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}\right), \quad (12)$$

حيث

$$f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho} \quad (13)$$

* فيما بعد سنعمل التفاصيل المتعلقة بالانتقال إلى النهايات ، والتي سبق شرحها عند استنباط معادلة الذبذبات المستعرضة للوتر .

** يرتبط شرط صخر الذبذبات في هذه الحالة بمحدود صلاحية قانون هوك للتطبيق فقط . وفي الحالة العامة يكون $T = k(x, u_x) u_x$ فنحصل على معادلة شبه خطية

$$[k(x, u_x) u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x, t).$$

هى كثافة القوة منسوبة إلى وحدة الكتل .

فقرة ٣ : طاقة ذبذبات الوتر . نعين صيغة طاقة الذبذبات المستعرضة للوتر $E = K + U$ حيث K طاقة الحركة ، U طاقة الوضع . وعنصر الوتر dx الذى يتحرك بالسرعة $v = u_t$ يكون له طاقة حركة :

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho(x) dx (u_t)^2 \quad (m = \rho dx).$$

وطاقة حركة الوتر كله تساوى

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) [u_t(x, t)]^2 dx. \quad (14)$$

وطاقة وضع الذبذبات المستعرضة للوتر ذى الشكل $u(x, t_0) = u_0(x)$ فى اللحظة الزمنية $t = t_0$ تساوى الشغل اللازم بذله لكى يتقل الوتر من وضع الاتزان إلى الوضع $u_0(x)$. نفرض أن الدالة $u(x, t)$ تعطى المقطع الجانبى للوتر فى اللحظة t علمًا بأن

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, t_0) = u_0(x).$$

والعنصر dx تحت تأثير محصلة قوى الشد

$$T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x = T u_{xx} dx$$

يقطع خلال الفترة الزمنية dt المسافة $u_t(x, t) dt$. والشغل الذى يبذله الوتر كله خلال الفترة dt يساوى :

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^l T_0 u_{xx} u_t dx \right\} dt &= \left\{ T_0 u_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l T_0 u_x u_{xt} dx \right\} dt = \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l T_0 (u_x)^2 dx + T_0 u_x u_t \Big|_0^l \right\} dt. \end{aligned}$$

وبإجراء التكامل بالنسبة إلى t من صفر حتى t_0 نحصل على

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^l T_0 (u_x)^2 dx \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l dt &= \\ = -\frac{1}{2} \int_0^l T_0 [u_x(x, t_0)]^2 dx + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l dt. \end{aligned}$$

ومن السهل توضيح معنى الحد الأخير من الطرف الأيمن لهذه المتساوية . بالفعل فإن $T_0 u_x|_{x=0}$ هو مقدار الشد في طرف الوتر $x=0$ و $u_t(0, t) dt$ إزاحة هذا الطرف ، والتكامل

$$\int_0^{t_0} T_0 u_x u_t|_{x=0} dt \quad (15)$$

هو عبارة عن الشغل اللازم بذله على إزاحة الطرف $x=0$. وللحد المناظر للطرف $x=l$ معنى مماثل . وإذا كان طرفا الوتر مثبتين فإن الشغل على طرفي الوتر يكون مساويا للصفر (عند ذلك يكون $u_t(0, t) = 0$ و $u(0, t) = 0$) . وبالتالي لا يعتمد الشغل عند انتقال الوتر المثبت الطرفين من وضع الاتزان $u=0$ إلى الوضع $u_0(x)$ على طريقة نقل الوتر إلى هذا الوضع ، ويكون مساويا :

$$-\frac{1}{2} \int_0^l T_0 [u_0(x)]^2 dx, \quad (16)$$

أى لطاقة وضع الوتر في اللحظة $t=t_0$ بإشارة مضادة . وبذلك تكون الطاقة الكلية للوتر مساوية

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [T_0 (u_x)^2 + \rho(x) (u_t)^2] dx. \quad (17)$$

وبالمثل تماماً يمكن الحصول على صيغة طاقة الوضع للذبذبات الطولية لقضيب . وجدير بالذكر أنه يمكن أيضاً الحصول عليها من صيغة طاقة وضع القضيب المرن

$$U = \frac{1}{2} k \left(\frac{l-l_0}{l_0} \right)^2 l_0$$

حيث l_0 الطول الابتدائي للقضيب ، و l طوله النهائى . ومن هنا ينتج مباشرة أن

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l k (u_x)^2 dx.$$

فقرة ٤ : استنباط معادلة الذبذبات الكهربائية في الموصلات . يتحدد مرور التيار الكهربائى فى موصل ذى بارامترات موزعة ، بقوة التيار i ، والجهد v

الذين يعتبران دالتين في موضع النقطة x والزمن t . وبتطبيق قانون أوم على جزء طوله dx يمكن أن نكتب أن فرق الجهد في عنصر الموصل dx يساوى مجموع القوى الدافعة الكهربائية

$$-v_x dx = iR dx + L \frac{di}{dt} dx, \quad (18)$$

حيث R و L هما المقاومة ومعامل الحث الذاتي لوحدة الأطوال .
وكمية الكهرباء المارة في عنصر الموصل dx خلال الفترة الزمنية dt وهى :

$$[i(x, t) - i(x + dx, t)] dt = -i_x dx dt, \quad (19)$$

تساوى مجموع كمية الكهرباء اللازمة لشحن العنصر dx والكبيرة الفارقة نتيجة عدم عزل الموصل عزلاً تاماً :

$$C[v(x, t + dt) - v(x, t)] dx + G dx \cdot v dt = (Cv_t + Gv) dx dt, \quad (20)$$

حيث C و G معامل السعة ومعامل التسرب لوحدة الأطوال ، علماً بأننا نعتبر كمية الفارق متناسبة مع الجهد في نقطة الموصل المعنية .

ومن العلاقات (18) و (19) و (20) نحصل على مجموعة المعادلات :

$$\left. \begin{aligned} i_x + Cv_t + Gv &= 0, \\ v_x + Li_t + Ri &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

التي تسمى بمجموعة المعادلات التلغرافية* .

وللحصول على معادلة واحدة تحدد الدالة i تفاضل المعادلة الأولى من (21) بالنسبة إلى x والثانية بالنسبة إلى t مع ضربها في C . ويطرح ما ينتج مع افتراض ثبات المعاملات نحصل على :

$$i_{xx} + Gv_x - CLi_{tt} - CRi_t = 0.$$

* تعتبر هذه المعادلات تقريبية في إطار نظرية المجال الكهرومغناطيسى لأنها لا تأخذ في الاعتبار الدبلبات الكهرومغناطيسية في الوسط المحيط بالموصل .

وبالتعويض عن v_x بقيمتها من المعادلة الثانية من (21) نحصل على معادلة لقوة التيار

$$i_{xx} = CLi_H + (CR + GL)i_t + GRL. \quad (22)$$

وبالمثل تكون صورة المعادلة للجهد

$$v_{xx} = CLv_H + (CR + GL)v_t + GRv. \quad (23)$$

وتسمى المعادلة (22) أو (23) بالمعادلة التلغرافية. وإذا أمكن إهمال ما يفقد خلال العازل وإذا كانت المقاومة صغيرة جدًا ($G \approx R \approx 0$) فإننا نتوصل إلى معادلة الذبذبات المعروفة

$$v_H = a^2 v_{xx} \quad \left(a = \sqrt{\frac{1}{LC}} \right). \quad (24)$$

الفقرة 5 : الذبذبات المستعرضة لغشاء. الغشاء (membrane) هو شريط مستو أو طبقة رقيقة مستوية لا تقاوم الثني والقص (shearing). لنأخذ غشاء مشدوداً على منحنى مستوي C . وسندرس الذبذبات المستعرضة للغشاء التي عندها تكون الإزاحة عمودية على مستوى الغشاء.

نفرض أن ds هو عنصر قوس منحنى ما مأخوذ على سطح الغشاء ويمر بالنقطة $M(x, y)$. ويؤثر على هذا العنصر شد يساوي $T ds$. ويقع المتجه T ، نتيجة لانعدام المقاومة للثني وللقص ، في المستوى المماس للسطح اللحظي للغشاء عمودياً على العنصر ds . ويمكن البرهان على أن انعدام المقاومة للقص يؤدي إلى أن مقدار الشد لن يكون معتمداً على اتجاه العنصر ds ، ومن ثم يكون متجه الشد $T = T(x, y, z)$ دالة في x, y, z . وخواص المتجه T هذه تعتبر تعبيراً رياضياً عن انعدام المقاومة للثني وللقص.

وسندرس الذبذبات الصغيرة للغشاء ، بإهمال مربعات المشتقات الأولى u و v حيث تحدد الدالة $u(x, y, t)$ شكل الغشاء في اللحظة الزمنية t . ومن هذا الافتراض ينتج مباشرة أن $T_k(x, y, t)$ وهو مسقط الشد على المستوى (x, y) يساوي القيمة المطلقة للشد. بالفعل فعند أى وضع للقوس ds لا تفوق الزاوية

ψ بين المتجه T والمستوى (x, y) الزاوية ψ المحصورة بين العمودى على سطح الغشاء فى النقطة (x, y) وبين المحور z . ولذا فإن :

$$\cos \psi' \geq \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1+x_z^2+y_z^2}} \approx 1,$$

أى أن $\cos \psi' \approx 1$ ، ويكون

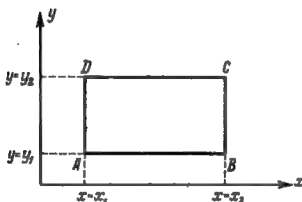
$$T_h(x, y, z, t) = T \cos \psi' \approx T(x, y, z, t). \quad (25)$$

ومن الواضح أن المركبة الرأسية للشد تكون مساوية

$$T_n = T \frac{\partial n}{\partial n}.$$

نأخذ على سطح الغشاء عنصر مساحة مسقطه على المستوى (x, y) هو المستطيل $ABCD$ الذى تكون أضلاعه موازية لمحاور الإحداثيات (شكل ٣) . وعلى هذا العنصر تؤثر قوة الشد التى تساوى :

$$T^* = \oint_{ABCD} T ds. \quad (26)$$



شكل ٣

ونتيجة لانعدام الحركة على امتداد المحورين x, y يكون مسقطا T^* على هذين المحورين مساويين للصفر :

$$\begin{aligned} T_x &= \int_B^C T(x_2, y, t) dy - \int_A^D T(x_1, y, t) dy = \\ &= \int_{y_1}^{y_2} (T(x_2, y, t) - T(x_1, y, t)) dy = 0. \end{aligned}$$

وبالمثل

$$T_y^* = \int_{x_1}^{x_2} \{T(x, y_2, t) - T(x, y_1, t)\} dx = 0.$$

وبالاستعانة بنظرية المتوسط وأخذ الطابع الاختيارى للمساحة $ABCD$ في الاعتبار نحصل على :

$$\left. \begin{aligned} T(x, y_1, t) &= T(x, y_2, t), \\ T(x_1, y, t) &= T(x_2, y, t), \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

أى أن الشد T لا يتغير عند تغير x, y ويمكن أن يعتمد فقط على t .
ومساحة أى عنصر فى الغشاء فى اللحظة الزمنية t تساوى فى تقريرائنا :

$$\iint \frac{dx dy}{\cos \psi} = \iint \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy \cong \iint dx dy. \quad (28)$$

وبالتالى لا تحدث استطالة للغشاء خلال عملية الذبذبة ومن ثم يتبع وفقاً لقانون هوك أن الشد لا يعتمد على الزمن. وبذلك أثبتنا أن الشد لا يعتمد على المتغيرات x, y, t :

$$T(x, y, t) = \text{const} = T_0. \quad (29)$$

نتقل إلى استنباط معادلة ذبذبات الغشاء. نستعين بالنظرية المتعلقة بالتغير فى كمية الحركة. نفرض أن S_1 مسقط جزء ما من الغشاء على المستوى (x, y) ، وأن C_1 هى حدود S_1 . وبمساواة التغير فى كمية الحركة بدفع المركبات الرأسية لقوى الشد والقوة الخارجية المؤثرة بالكثافة $F(x, y, t)$ نحصل على معادلة ذبذبات الغشاء فى الصورة التكاملية

$$\begin{aligned} \iint_S [u_t(x, y, t_2) - u_t(x, y, t_1)] \rho(x, y) dx dy = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{C_1} T_0 \frac{\partial u}{\partial n} ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_1} F dx dy dt, \end{aligned} \quad (30)$$

حيث $\rho(x, y)$ الكثافة السطحية للغشاء ، $F(x, y, t)$ كثافة القوة الخارجية (في وحدة المساحات) .

وللانتقال إلى المعادلة التفاضلية نفرض أن للدالة $u(x, y, t)$ مشتقات ثانية متصلة . وبواسطة نظرية أوستروجرادسكى* يتحول التكامل المنحني (على المنحني) إلى تكامل سطحي (على السطح) :

$$\int_{C_1} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{S_1} (u_{xx} + u_{yy}) dx dy,$$

ونتيجة لذلك تحول المعادلة التكاملية للذبذبات إلى الصورة :

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_1} \{ \rho u_{tt} - T_0 (u_{xx} + u_{yy}) - F(x, y, t) \} dx dy dt = 0.$$

وبالاستعانة بنظرية المتوسط وبالطابع الاختياري للمساحة S_1 وللفترة الزمنية (t_1, t_2) نستنتج أن الصيغة داخل القوسين المزدوجين تطابق الصفر . وبذلك نصل إلى المعادلة التفاضلية للذبذبات للغشاء :

$$\rho u_{tt} = T_0 (u_{xx} + u_{yy}) + F(x, y, t). \quad (31)$$

ويمكن كتابة معادلة ذبذبات الغشاء المتجانس في الصورة

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t) \quad (a^2 = \frac{T_0}{\rho}). \quad (32)$$

حيث $f(x, y, t)$ كثافة القوة في وحدة كتل الغشاء .

فقرة ٦ : معادلات الهيدروديناميكا والصوتيات . تستخدم الدوال $v_1(x, y, z, t)$, $v_2(x, y, z, t)$, $v_3(x, y, z, t)$ وهى مركبات متجه السرعة v في النقطة (x, y, z) في اللحظة t (متغيرات أولير) بمثابة مميزات لحركة السائل . وتعتبر أيضاً الكثافة $\rho(x, y, z, t)$ والضغط $p(x, y, z, t)$ وكثافة القوى الخارجية $F(x, y, z, t)$ (إن وجدت) المنسوبة إلى وحدة الكتل ، مقادير مميزة لحركة السائل .

* انظر كتاب «يسكونوف والتفاضل والتكامل» طبعة دار «مير» - الجزء الثاني - ص ٤٠٣ .

ندرس حجمًا ما T من السائل ونحسب القوى المؤثرة عليه . باهمال قوى الاحتكاك الناشئة من اللزوجة ، أى بدراسة سائل مثالي ، نحصل على صيغة لمحصلة قوى الضغط في صورة تكامل سطحي :

$$-\iint_S p n dS, \quad (33)$$

حيث S سطح الحجم T ، n الوحدة الانجائية للعمودى الخارجى . وتعطينا علاقة أوستروجرادسكى * :

$$-\iint_S p n dS = -\iiint_T \text{grad } p d\tau. \quad (34)$$

وعند حساب عجلة نقطة ما من نقط السائل لابد من الأخذ في الاعتبار حركة النقطة نفسها . نفرض أن $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ معادلة مسار هذه النقطة . نحسب مشتقة السرعة بالزمن

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v}{\partial z} \dot{z} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v}{\partial y} v_2 + \frac{\partial v}{\partial z} v_3 = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v, \end{aligned}$$

حيث

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

وتسمى مثل هذه المشتقة بالزمن التى تأخذ في الاعتبار حركة جسيم الوسط (مادته) بالمشتقة المادية . وتعبّر معادلة حركة السائل عن الارتباط المتبادل بين عجلة الجسيمات والقوى المؤثرة عليها

$$\iiint_T \rho \frac{dv}{dt} d\tau = -\iiint_T \text{grad } p d\tau + \iiint_T \rho F d\tau, \quad (35)$$

* بالفعل حيث إن $p n = p \cos(n, x) i + p \cos(n, y) j + p \cos(n, z) k$ حيث i, j, k متجهات الوحدة في مجموعة الإحداثيات (x, y, z) فإن

$$\iiint_S p \cos(n, x) dx = \iiint_T \frac{\partial p}{\partial x} d\tau$$

حيث التكامل الأخير هو عبارة عن محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الحجم T .
ومن هنا ووفقاً للطابع الاختياري للحجم T نحصل على معادلة حركة السائل المثالي
في صورة أولر :

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{F}. \quad (36)$$

نتقل إلى استنباط معادلة الاتصال . إذا لم يوجد داخل T أية منابع أو مصارف
فإن التغير في وحدة الزمن لكمية السائل المحصورة داخل T يساوى التدفق خلال
حدود S

$$\frac{d}{dt} \iiint_T \rho \, dt = - \iint_S \rho \, \mathbf{v} \mathbf{n} \, dS. \quad (37)$$

ويعطى تحويل التكامل السطحي إلى حجمي :

$$\iiint_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) \right) d\tau = 0.$$

وحيث إن هذه المتساوية صحيحة لأيّة أحجام مهما كانت صغيرة فتتج من هنا
معادلة الاتصال :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

أو

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \text{grad } \rho + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (38)$$

وينبغي إضافة معادلة الديناميكا الحرارية لحالة السائل إلى المعادلتين (36) و (38) ،
وسنأخذها هنا في الصورة :

$$p = f(\rho).$$

وبالتالي نحصل على مجموعة من خمس معادلات في خمس دوال مجهولة
 ρ, v_x, v_y, v_z, p . وإذا كانت معادلة الحالة تحتوي على درجة الحرارة لكان
يجب أيضاً إضافة معادلة الانتقال الحرارى (انظر الملحق الرابع). وبذلك تكون
مجموعة المعادلات

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ p &= f(\rho) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

عبارة عن مجموعة مغلقة لمعادلات الهيدروديناميكا .

نطبق معادلات الهيدروديناميكا على عملية انتشار الصوت في الغاز . نصلح على الافتراضات التالية : ١ - تنعدم القوى الخارجية ؛ ٢ - عملية انتشار الصوت هي عملية ادياباتية ولذا فمعادلة الحالة هي عبارة عن معادلة بواسون الادياباتية

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v} \right),$$

حيث p_0 و ρ_0 الكثافة الابتدائية والضغط الابتدائي ، c_p السعة الحرارية عند ثبات الضغط ، c_v السعة الحرارية عند ثبات الحجم ؛ ٣ - ذبذبات الغاز صغيرة فيمكن إهمال القوى العليا للسرعات وتدرجات (gradients) السرعات والتغيرات في الكثافة .

نسمى بتكثيف الغاز المقدار $s(x, y, z, t)$ الذى يساوى التغير النسبي في الكثافة

$$s(x, y, z, t) = \frac{p - p_0}{p_0}, \quad (40)$$

ومنها

$$\rho = \rho_0(1 + s). \quad (41)$$

وتأخذ معادلات الهيدروديناميكا بالافتراضات السابقة الصورة :

$$\left. \begin{aligned} v_t &= -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p, \\ \rho_t + \rho_0 \text{div } v &= 0, \\ p &= p_0(1 + s)^\gamma \approx p_0(1 + \gamma s), \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

وذلك لأن

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{1}{\rho_0} (1 - s + \dots) \text{grad } p = \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p + \dots,$$

$$\text{div } \rho v = v \text{grad } \rho + \rho \text{div } v = \rho_0 \text{div } v + \dots,$$

حيث ترمز النقط إلى الحدود من الرتبة الثانية أو أعلى في الصغر . وبالرمز إلى $a^2 = \gamma p_0 / \rho_0$ نكتب المجموعة (42) في الصورة :

$$\left. \begin{aligned} v_t &= -a^2 \text{grad } s, \\ s_t + \text{div } v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (42')$$

وبالتأثير على المعادلة الأولى من (42') بمؤثر التباعد وتغيير ترتيب التفاضل نحصل على :

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v} = -a^2 \operatorname{div} (\operatorname{grad} s) = -a^2 \nabla^2 s = -a^2 \Delta s,$$

حيث

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

هو مؤثر لابلاس . وبالاستعانة بالمعادلة الثانية من (42') نحصل على معادلة الذبذبات

$$\Delta s = \frac{1}{a^2} s_{tt} \quad (43)$$

أو

$$a^2 (s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}) = s_{tt}.$$

ومن هنا ومن (40) نحصل على معادلة للكثافة

$$a^2 (\rho_{xx} + \rho_{yy} + \rho_{zz}) = \rho_{tt}. \quad (43')$$

والمعادلتان (43) و (43') هما معادلتان للذبذبات . والآن ندخل مفهوم جهد السرعات ونوضح أنه يحقق نفس معادلة الذبذبات (43) مثله مثل التكثيف . من المعادلة

$$\mathbf{v}_t = -a^2 \operatorname{grad} s$$

يتبع أن

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{v}(x, y, z, 0) - a^2 \operatorname{grad} \left(\int_0^t s \cdot dt \right). \quad (44)$$

حيث $\mathbf{v}(x, y, z, 0)$ التوزيع الابتدائي للسرعات . وإذا كان لجال السرعات في اللحظة الابتدائية الجهد

$$\mathbf{v}_{\text{مبدا}} = -\operatorname{grad} f(x, y, z), \quad (45)$$

فتتحقق العلاقة التالية :

$$\mathbf{v} = -\text{grad} \left[f(x, y, z) + \alpha^2 \int_0^t s \, dt \right] = -\text{grad } U, \quad (46)$$

التي تعني وجود جهد السرعات $U(x, y, z, t)$. ومعرفة جهد السرعات يكون كافياً لوصف كل عملية الحركة*

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= -\text{grad } U, \\ s &= \frac{1}{\alpha^2} U_t. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

وبالتعويض بهذه القيم في معادلة الاتصال

$$s_t + \text{div } \mathbf{v} = 0,$$

نحصل على معادلة اللذبذبات للجهد

$$\alpha^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = U_{tt}$$

أو

$$U_{tt} = \alpha^2 \Delta U. \quad (48)$$

ويمكن أيضاً الحصول على معادلة ذبذبات على الصورة (48) لكل من الضغط p والسرعة \mathbf{v} . والمعادلة (48) كثيراً ما تسمى بمعادلة الصوتيات .

ولحل المسائل في الحالة الثنائية الأبعاد (في المستوى) أو أحادية البعد يجب التعويض في المعادلة (48) عن مؤثر لابلاس بالمؤثر $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ أو $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. ويكون للثابت $\alpha = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ مقياس السرعة ، ويكون كما سنوضح ذلك في البند ٢ هو عبارة عن سرعة انتشار الصوت .

* من العلاقة (46) يتضح أن الجهد U معرف بدقة حد يتغير دالة اختيارية في t . ومن المعادلة $\mathbf{v}_t = -\alpha^2 \text{grad } s$. والمعادلة (46) يتبع أن $\left(s - \frac{1}{\alpha^2} U_t \right) = 0$ أى أن $s = \frac{1}{\alpha^2} U_t$ ، وذلك عند التقنين المناسب للجهد U .

نحسب سرعة الصوت في الهواء عند الضغط الجوى العادى . وفي هذه الحالة
وبالتالى $p_0 = 1.033 \text{ kg/cm}^2$ ، $p_0 = 0.001293 \text{ g/cm}^3$ ، $\gamma = 7/5$

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = 336 \text{ m/s.}$$

وفي حالة ذبذبة الغاز في منطقة محدودة يجب أن تعطى على الحدود شروط
حدية معينة . وإذا كانت الحدود عبارة عن جدار غير نفاذ صلب فإن المركبة
العمودية للسرعة تكون مساوية للصفر مما يؤدي إلى الشرط :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_z = 0 \quad \text{أو} \quad \left. \frac{\partial s}{\partial n} \right|_z = 0 \quad (49)$$

فقرة ٧ : الشروط الحدية والشروط الابتدائية . لا بد قبل أى شىء عند
الوصف الرياضى للعملية الفيزيائية من صياغة المسألة أى صياغة الشروط الكافية
لتحديد العملية تحديداً أحادى القيمة .

والمعادلات التفاضلية العادية وبالأولى الجزئية يكون لها بوجه عام مجمل
لانهاى من الحلول . ولذا فعندما تؤول المسألة الفيزيائية إلى معادلة تفاضلية جزئية
لا بد لتمييز العملية تمييزاً أحادى القيمة من إضافة شروط إضافية إلى المعادلة .

وفي حالة المعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الثانية يمكن تحديد المسألة
بالشروط الابتدائية أى بإعطاء قيمتى الدالة ومشتقتها الأولى عند قيمة المتغير المستقل
«الابتدائية» (مسألة كوشى) . كما تصادفنا صور أخرى للشروط الإضافية ، على
سبيل المثال عندما تعطى قيمتا الدالة في نقطتين (مسألة منحنى السلسلة) .
وللمعادلة التفاضلية الجزئية يمكن أن توجد أيضاً صور مختلفة للشروط الإضافية .

ندرس في البداية المسألة المسطحة عن الذبذبات المستعرضة لوتر مثبت الطرفين .
في هذه المسألة تعطى الدالة $u(x, t)$ انحراف الوتر عن المحور x . وإذا كان طرفا
الوتر $0 \leq x \leq l$ مثبتين ، فيجب أن تتحقق «الشروط الحدية» :

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (50)$$

وحيث إن عملية ذبذبة الوتر تعتمد على صورته الابتدائية (شكله في اللحظة

الابتدائية) وتوزيع السرعات في اللحظة الابتدائية فيجب إعطاء الشروط الابتدائية :

$$\left. \begin{aligned} u(x, t_0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, t_0) &= \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

وبذلك تتكون الشروط الإضافية من الشروط الحدية والابتدائية حيث $\varphi(x), \psi(x)$ دوال في النقطة معطاة (أى دوال في إحداثى النقطة). وفيما بعد سنوضح أن هذه الشروط تحدد تمامًا حل معادلة ذبذبات الوتر

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (52)$$

وإذا كان طرفا الوتر يتحركان بقانون حركة معطى فإن الشروط الحدية (50) تأخذ الصورة :

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (50')$$

حيث $\mu_1(t), \mu_2(t)$ دوال معطاة في الزمن t . وبالمثل تصاغ مسألة الذبذبات الطولية لوتر أو زنبرك.

وهناك أنواع أخرى محتملة للشروط الحدية. ندرس على سبيل المثال مسألة الذبذبات الطولية لزنبرك أحد طرفيه مثبت (نقطة التعليق) ، وطرفه الآخر حر. وقانون حركة الطرف الحر غير معطى وكثيرًا ما يكون هو بعينه الدالة المطلوبة.

وفي نقطة التعليق $x = 0$ يكون الانحراف

$$u(0, t) = 0;$$

وفي الطرف الحر $x = l$ فإن الشد في الزنبرك

$$T(l, t) = k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} \quad (53)$$

يكون مساويًا للصفر (تعدم القوى الخارجية) ، ومن ثم تكون الصياغة الرياضية للشروط المفروض بالنسبة إلى الطرف الحر على الصورة :

$$u_x(l, t) = 0.$$

وإذا كان الطرف $x=0$ يتحرك بقانون معلوم $\mu(t)$ ، وعند $x=l$ معطاة القوة $\bar{v}(t)$ ، فإن

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = v(t), \quad \left(v(t) = \frac{1}{k} \bar{v}(t) \right).$$

ويعتبر شائعاً أيضاً شرط التثبيت المرن ، وليكن مثلاً للطرف $x=l$

$$ku_x(l, t) = -\alpha u(l, t) \quad .$$

أو

$$u_x(l, t) = -hu(l, t) \quad \left(h = \frac{\alpha}{k} \right). \quad (54)$$

وبوجود هذا الشرط يمكن أن يتحرك الطرف $x=l$ ولكن القوة المرنة للتثبيت تسبب نشوء شد في هذا الطرف يحاول إعادة الطرف المزاح إلى وضعه الأولى . وهذه القوة تكون وفقاً لقانون هوك متناسبة مع الإزاحة $u(l, t)$. ومعامل التناسب α يسمى بمعامل صلابة (كزازة) التثبيت .

وإذا كانت النقطة (المجموعة) التي يتحقق فيها التثبيت المرن تتحرك ويعطى انحرافها عن الوضع الابتدائي بالدالة $\theta(t)$ فإن الشرط الحدى يأخذ الصورة :

$$u_x(l, t) = -h[u(l, t) - \theta(t)], \quad h = \frac{\alpha}{k} > 0. \quad (55)$$

وشرط التثبيت المرن في الطرف الأيسر $x=0$ يكون على الصورة

$$u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)], \quad h > 0$$

(ويمكن ، شكلياً ، اعتبار أن (55) تتحقق أيضاً عندما $\theta = 0$ ولكن $h < 0$) . وينبغي الإشارة إلى إنه في حالة التثبيت الصلب (α كبيرة) ، عندما تسبب الإزاحات حتى الصغيرة منها نشوء شد كبير ، يتحول الشرط الحدى (55) إلى الشرط ($\alpha = \infty$) $u(l, t) = \mu(t)$ عند $\mu(t) = \theta(t)$. وفي حالة التثبيت اللين (α صغيرة) عندما لا تسبب الإزاحات الكبيرة إلا في نشوء شد ضعيف يتحول الشرط الحدى إلى شرط الطرف الحر

$$u_x(l, t) = 0 \quad (\alpha = 0).$$

وفيما سيلي مستحدث عن ثلاثة أنواع أساسية من الشروط الحدية :

الشرط الحدى من النوع الأول $u(0, t) = \mu(t)$: نظام حركة معطى ؛

الشرط الحدى من النوع الثانى $u_x(0, t) = v(t)$: قوة معطاة ؛

الشرط الحدى من النوع الثالث $u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)]$: تثبيت المرن .

وبالمثل تعطى الشروط الحدية على الطرف الثانى $x = l$. وإذا كانت الدوال المعطاة فى الأطراف اليمنى $\mu(t)$ أو $v(t)$ أو $\theta(t)$ مساوية للصفر فإن الشروط الحدية تسمى متجانسة . وباتتلاف الأنواع المختلفة المذكورة من الشروط الحدية نحصل على ستة أنواع من أبسط المسائل الحدية .

ويتحقق شرط حدى أكثر تعقيداً فى حالة التثبيت المرن الذى لا يخضع لقانون هوك عندما يكون الشد فى طرف الوتر دالة لاختطية فى الإزاحة $u(l, t)$ بحيث إن

$$u_x(l, t) = \frac{1}{h} F[u(l, t)]. \quad (56)$$

وهذا الشرط الحدى يعتبر بخلاف الشروط السابق دراستها شرطاً لاختطياً . وبعد ذلك فن المحتمل أيضاً وجود علاقات معينة بين الإزاحات والشد فى أطراف المجموعة المختلفة . فعلى سبيل المثال فى مسائل ذبذبة الحلقة عندما يكون $x = l$ و $x = 0$ هما عبارة عن نقطة فيزيائية واحدة تأخذ الشروط الحدية الصورة :

$$u(l, t) = u(0, t); \quad u_x(0, t) = u_x(l, t). \quad (57)$$

أى إنها تؤول إلى طلب اتصال u و u_x . ويمكن أيضاً أن تدخل المشتقات بالنسبة إلى t فى الشروط الحدية . وإذا كان طرف الزنبرك يعانى من مقاومة الوسط التى تناسب مع سرعة حركته (ثبت فى طرف الزنبرك لوح مستواه عمودى على محور الزنبرك) فإن الشرط الحدى يأخذ الصورة :

$$ku_x(l, t) = -au_t(l, t). \quad (58)$$

وإذا علق ثقل كتلته m فى طرف الزنبرك $x = l$ فإنه عند $x = l$ يجب أن يتحقق الشرط

$$mu_{tt}(l, t) = -ku_x(l, t) + mg. \quad (59)$$

وفي حالة الذبذبات المستعرضة للوتر تكتب جميع هذه الشروط الحدية على نفس الصورة مع التعويض عن k بـ T_0 .

وفي المستقبل سنكتفى بدراسة الثلاثة أنواع البسيطة من الشروط الحدية ، وذلك بإجراء العرض الأساسى على مثال النوع الأول من الشروط الحدية مع ذكر الخصائص المتعلقة بالشروط الثانية والثالثة .

نصيغ المسألة الحدية الأولى للمعادلة (5) :

عين الدالة $u(x, t)$ المعرفة في المنطقة $0 \leq x \leq l$ ، $t \geq 0$ والتي تحقق المعادلة :

$$0 < x < l, t > 0 \text{ للقيم } u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

والشروط الحدية

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \quad (t > 0) \quad (60')$$

والشروط الابتدائية

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \quad (0 < x < l). \quad (60'')$$

وبالمثل تصاغ المسألة للمعادلة (11) .

وإذا أخذت على الطرفين الشروط الحدية من النوع الثانى أو الثالث فإن المسألتين المناظرتين تسميان بالمسألة الحدية الثانية والمسألة الحدية الثالثة . وإذا كانت الشروط الحدية عند $x=0$ و $x=l$ من نوعين مختلفين فإن مثل هذه المسائل تسمى بالمسائل الحدية المختلطة ، ولن نجرى لها تصنيفاً مفصلاً .

ونتقل الآن إلى دراسة الحالات النهائية للمسألة المصاغة . إن تأثير الشروط الحدية في النقطة M_0 البعيدة بعداً كافياً عن الحدود التي تعطى عليها هذه الشروط يحدث بعد فترة زمنية كبيرة كبراً كافياً .

وإذا كان ما يهمنا هو حدوث الظاهرة خلال فترة زمنية صغيرة عندما لا يكون

تأثير الحدود جوهرياً بعد فإنه يمكن بدلاً من المسألة الكاملة دراسة المسألة النهائية بالشروط الابتدائية لمنطقة لانهاية :

عين حل المعادلة

$$t > 0, -\infty < x < \infty \text{ لقيم } u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

بالشروط الابتدائية

$$-\infty < x < \infty \text{ عندما } \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (61)$$

وكثيراً ما تسمى هذه المسألة بمسألة كوشي .

أما إذا كنا ندرس الظاهرة قرب أحد الحدود ولا يكون لتأثير النظام الحدى على الحدود الأخرى قيمة جوهريّة خلال الفترة الزمنية التي تهتمنا فإننا نصل إلى صياغة للمسألة على مستقيم نصف محدود (نصف مستقيم لانهاية) $0 \leq x < \infty$ عندما تكون معطاة فضلاً عن المعادلة الشروط الإضافية التالية :

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu(t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} 0 \leq x < \infty. \quad (62)$$

وطابع الظاهرة في اللحظات الزمنية البعيدة بشكل كاف عن اللحظة الابتدائية $t=0$ يتحدد تحديداً تاماً بالشروط الحدية لأن تأثير الشروط الابتدائية يضعف مع مرور الزمن بفضل الاحتكاك الموجود في أية مجموعة حقيقية* .

ويصادفنا مثل هذا النوع من المسائل بكثرة ، خاصة عندما تضطرب المجموعة بنظام حدى دورى يؤثر زمناً طويلاً . ومثل هذه المسائل «بدون شروط ابتدائية» (في نظام مستقر زمنياً) تصاغ على الوجه التالى :

* معادلة اللبذبات مع الأخذ في الاعتبار الاحتكاك للتناسب مع السرعة تكون على الصورة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t \quad (\alpha > 0).$$

انظر بالتفصيل صياغة المسألة بدون شروط ابتدائية عندما $\alpha = 0$ في فقرة ٧ ، بند ٣ .

عين حل المعادلة المدروسة للقيم $0 \leq x \leq l$ و $t > -\infty$ بالشروط الحدية

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

وبالمثل تصاغ المسألة بلا شروط ابتدائية للمستقيم نصف المحدود.

وفيما بعد سندرس علاوة على المسائل الحدية الأساسية المسائل النهائية أيضاً :

١ - المسائل في المنطقة اللانهاية عندما يكون أحد الحدود أو كلاهما في المالا نهاية .

٢ - المسائل بلا شروط ابتدائية (في نظام مستقر زمنياً) عندما تدرس الحلول المعروفة خلال فترة زمنية لانهاية .

فقرة ٨ : اختصار المسألة العامة . عند حل مسألة معقدة يكون من الطبيعي أن نحاول تحويل هذا الحل إلى حل مسائل أكثر سهولة . ولهذا الغرض نعبر عن حل المسألة الحدية العامة في صورة مجموع حلول عدة مسائل حدية خاصة .

نفرض أن $u_i(x, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) دوال تحقق المعادلات

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f^i(x, t) \quad (64)$$

عندما $0 < x < l$ ، $t > 0$ ، وتحقق الشروط الإضافية

$$\left. \begin{aligned} u_i(0, t) &= \mu_1^i(t), \\ u_i(l, t) &= \mu_2^i(t); \\ u_i(x, 0) &= \varphi^i(x), \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) &= \psi^i(x). \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

ومن الواضح أنه يتحقق تراكم (superposition) الحلول أى أن الدالة

$$u^{(0)}(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i(x, t) \quad (66)$$

تحقق معادلة مماثلة ذات طرف أيمن

$$f^{(0)}(x, t) = \sum_{i=1}^n f^i(x, t) \quad (67)$$

وتحقق الشروط الإضافية التي أطرافها اليمنى هي الدوال

$$\left. \begin{aligned} \mu_k^{(0)}(t) &= \sum_{l=1}^n \mu_k^l(t) \quad (k=1, 2), \\ \varphi^{(0)}(x) &= \sum_{l=1}^n \varphi^l(x), \\ \psi^{(0)}(x) &= \sum_{l=1}^n \psi^l(x). \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

وواضح أن مبدأ التراكب المذكور لا يسرى فقط على المسألة المعطاة بل إنه يسرى أيضاً على أية معادلة خطية ذات شروط إضافية خطية. ونستعين بهذه الخاصية كثيراً في المستقبل.

وجل المسألة الحدية العامة

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x, t) \\ (0 < x < l, t > 0); \\ u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t); \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

يمكن التعبير عنه في صورة المجموع

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t), \quad (70)$$

حيث u_1, u_2, u_3, u_4 حلول المسائل الحدية الخاصة التالية :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad (i=1, 2, 3), \\ \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + f(x, t), \end{aligned} \quad (0 < x < l, t > 0),$$

$$\left. \begin{aligned} u_1(0, t) &= 0, & u_2(0, t) &= \mu_1(t), & u_3(0, t) &= 0, & u_4(0, t) &= 0, \\ u_1(l, t) &= 0; & u_2(l, t) &= 0; & u_3(l, t) &= \mu_2(t); & u_4(l, t) &= 0; \\ u_1(x, 0) &= \varphi(x), & u_2(x, 0) &= 0, & u_3(x, 0) &= 0, & u_4(x, 0) &= 0, \\ u_{1t}(x, 0) &= \psi(x), & u_{2t}(x, 0) &= 0; & u_{3t}(x, 0) &= 0; & u_{4t}(x, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

وسنكتفى هنا بهذا الاختصار الشكلي لكي نميز المسائل الحدية الخاصة التي تشكل المراحل الأساسية في حل المسألة العامة . ويمكن إجراء اختصار مماثل للحالات النهائية للمسألة الحدية العامة أيضاً .

فقرة ٩ : صياغة المسائل الحدية في حالة تعدد المتغيرات . درسنا بالتفصيل صياغة المسائل الحدية في حالة المتغير الهندسي المستقل الواحد x (والزمن t) . وإذا كان عدد المتغيرات الهندسية $n > 1$ (مثلاً $n = 3$) فإن المسألة الحدية الأولى تصاغ بطريقة مماثلة تماماً :

يطلب تعيين الدالة $u(M, t) = u(x, y, z, t)$ المعرفة عند $t \geq 0$ داخل المنطقة المعطاة T بالحدود Σ ، والتي تحقق عند $t > 0$ داخل T المعادلة

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M, t) \quad (M(x, y, z) \in T, t > 0), \quad (72)$$

ونحقق على Σ الشرط الحدى

$$u|_{\Sigma} = \mu(P, t) \quad (P(x, y, z) \in \Sigma, t \geq 0) \quad (73)$$

($\mu(x, y, z, t)$ دالة معطاة على Σ) وتحقق الشروط الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u(M, 0) &= \varphi(M), \\ u_t(M, 0) &= \psi(M) \end{aligned} \right\} \quad (M(x, y, z) \in T). \quad (74)$$

ويجرى تحليل المسألة الحدية العامة إلى عدة مسائل بسيطة بطريقة مماثلة لما سبق . ونشير إلى أنه من الممكن أيضاً صياغة المسائل الحدية النهائية لمنطقة لانهائية أو لنصف الفراغ ، .. الخ .

فقرة ١٠ : نظرية الوجدانية . عند حل المسائل الحدية :

١ - ينبغى التأكد من أن الشروط الإضافية تكون كافية للحصول على حل أحادى القيمة ، وتوصل إلى ذلك بإثبات نظرية الوجدانية .

٢ - ينبغى التأكد من أن الشروط الإضافية لا تتجاوز تحديد المسألة أى التأكد من عدم وجود شروط غير متوافقة أو متناقضة فيما بينها ، ويتم التوصل إلى ذلك

بإثبات نظرية الوجود. وعادة يرتبط إثبات وجود الحل ارتباطاً وثيقاً بطريقة تعيين الحل.

وفي هذه الفقرة سنثبت نظرية الوجدانية التالية :
من الممكن وجود دالة واحدة فقط $u(x, t)$ ، معرفة في المنطقة
 $0 \leq x \leq l$ ، $t \geq 0$ وتحقق المعادلة

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) \quad (\rho(x) > 0, k(x) > 0),$$

$$0 < x < l, \quad t > 0, \quad (75)$$

والشروط الابتدائية والحدية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x), \\ u(0, t) &= \mu_1(t), & u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

إذا تحققت الشروط :

١ - الدالة $u(x, t)$ والمشتقات التي تدخل في المعادلة (75) وكذلك المشتقة u_{xt} تكون دوال متصلة في الفترة المغلقة $0 \leq x \leq l$ عندما $t \geq 0$ ؛

٢ - المعاملان $\rho(x)$ و $k(x)$ متصلان في الفترة المغلقة $0 \leq x \leq l$.

نفرض أنه يوجد حلان للمسألة المدروسة :

$$u_1(x, t), \quad u_2(x, t),$$

وندرس الفرق $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$.

ومن الواضح أن الدالة $v(x, t)$ تحقق المعادلة المتجانسة

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (77)$$

والشروط الإضافية المتجانسة :

$$\left. \begin{aligned} v(x, 0) &= 0, & v(0, t) &= 0, \\ v_t(x, 0) &= 0; & v(l, t) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

وكذلك الشرط ١ من النظرية .

نثبت أن الدالة $v(x, t)$ تساوى الصفر بالتطابق .

ندرس الدالة

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \{k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2\} dx \quad (79)$$

ونوضح أنها لا تعتمد على t . والمعنى الفيزيائي للدالة $E(t)$ واضح : فهي الطاقة الكلية للوتر في اللحظة الزمنية t . نفاضل $E(t)$ بالنسبة إلى t ، بالقيام عند ذلك بعملية التفاضل تحت علامة التكامل *

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l (kv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt}) dx.$$

ويتكامل الحد الأول من الطرف الأيمن بالتجزئة نحصل على :

$$\int_0^l kv_x v_{xt} dx = [kv_x v_t]_0^l - \int_0^l v_t (kv_x)_x dx. \quad (80)$$

والتعويض بالنهايتين في الحد الأول من هذه المتساوية يعطينا صفرًا (من $v(0, t) = 0$ ينتج أن $v_t(0, t) = 0$ وبالمثل في حالة $x = l$. ومن هنا ينتج أن

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l [\rho v_t v_{tt} - v_t (kv_x)_x] dx = \int_0^l v_t [\rho v_{tt} - (kv_x)_x] dx = 0,$$

أى أن $E(t) = \text{const}$. وبالأخذ في الاعتبار الشروط الابتدائية ، نحصل على :

$$E(t) = \text{const} = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l [k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2]_{t=0} dx = 0. \quad (81)$$

لإجراء عملية التفاضل تحت علامة التكامل يكفي أن تكون الصيغة الكاملة الناتجة عند ذلك متصلة في الفترة المغلقة $0 \leq x \leq l$ عند $t \geq 0$. وهذا الشرط يتحقق في حالتنا لأن الدالة $v(x, t)$ تحقق الشرط ١ من النظرية . و $k(x)$ ، $\rho(x)$ تحققان الشرط ٢ .

حيث إن

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0.$$

وبالاستعانة بالعلاقة (81) وكون p و k موجبين نستنتج أن :

$$v_x(x, t) = 0, \quad v_t(x, t) = 0,$$

ومن هنا نتج المتطابقة

$$v(x, t) = \text{const} = C_0. \quad (82)$$

وبالاستعانة بالشروط الابتدائية نجد أن

$$v(x, 0) = C_0 = 0;$$

وبذلك أثبتنا أن

$$v(x, t) = 0. \quad (83)$$

وبالتالى فإذا وجدت دالتان $u_1(x, t)$ و $u_2(x, t)$ تحققان جميع شروط النظرية فإن

$$u_1(x, t) = u_2(x, t)$$

وللمسألة الحدية الثانية الدالة $v = u_1 - u_2$ تحقق الشروط الحدية

$$v_x(0, t) = 0, \quad v_x(l, t) = 0, \quad (84)$$

والتعويض بالنهايتين فى الحد الأول من العلاقة (80) يعطينا أيضاً فى هذه الحالة صفراً. ويظل القسم الباقى من إثبات النظرية بلا تغيير.

وللمسألة الحدية الثالثة يتطلب الإثبات بعض التغييرات. بدراسة حلين u_1 و u_2 كما سبق نحصل للفرق بينهما $v(x, t) = u_1 - u_2$ على المعادلة (77) والشروط الحدية

$$\left. \begin{aligned} v_x(0, t) - h_1 v(0, t) &= 0 \quad (h_1 \geq 0), \\ v_x(l, t) + h_2 v(l, t) &= 0 \quad (h_2 \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

نمبر عن التعويض بالنهايتين في (80) في الصورة

$$[k v_x v_t]_0^t = -\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial t} [h_2 v^2(t, t) + h_1 v^2(0, t)].$$

ويتكامل $\frac{dE}{dt}$ بالنهايتين من صفر إلى t نحصل على :

$$E(t) - E(0) = \int_0^t \int_0^t v_t [\rho v_{tt} - (k v_x)_x] dx dt - \\ - \frac{k}{2} [h_2 [v^2(t, t) - v^2(t, 0)] + h_1 [v^2(0, t) - v^2(0, 0)]],$$

ومن هنا يتبع وفقاً للمعادلة والشروط الابتدائية :

$$E(t) = -\frac{k}{2} [h_2 v^2(t, t) + h_1 v^2(0, t)] \leq 0. \quad (86)$$

وحيث إن $E(t) \geq 0$ نظراً لأن الدالة المكاملة غير سالبة فإنه

$$E(t) = 0, \quad (87)$$

وبالتالى فإنه

$$v(x, t) = 0. \quad (88)$$

وطريقة إثبات نظرية الوجدانية المعروضة هنا تستند على الاستعانة بصيغة الطاقة الكلية وهى شائعة التطبيق عند إثبات نظريات الوجدانية فى مختلف فروع الفيزياء الرياضية، على سبيل المثال فى نظرية المجالات الكهرومغناطيسية ونظرية المرونة والهيدروديناميكا.

وسيرد إثبات وجدانية المسائل الحدية الأخرى (مسألة كوشى والمسألة بلا شروط ابتدائية) فيما بعد كل فى مكانه المناسب.

مسائل :

١- اثبت أن معادلة الذبذبات الاتوائية الصغيرة لقضيب تكون على الصورة

$$\theta_{tt} = a^2 \theta_{xx}, \quad a = \sqrt{\frac{GI}{k}}.$$

حيث θ هي زاوية دوران مقطع القضيب ذى الإحداثى الأفقى x . معامل القص G . عزم القصور الذاتي القطبي للمقطع العرضى J . عزم القصور الذاتى لوحدة أطوال القضيب . وضع التفسير الفيزيائى للشروط الحدية من الأنواع الأول والثانى والثالث لهذه المعادلة .

٢ - سلك متجانس مطلق القابلية للامتثناء مثبت عند أحد طرفيه وموجود فى وضع الاتزان الرأسى تحت تأثير وزنه . استنبط معادلة الذبذبات الصغيرة للسلك .

$$\text{الجواب : } \alpha^2 = g \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(l-x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

حيث $u(x,t)$ إزاحة النقطة ، l طول السلك . g عجلة الجاذبية .

٣ - سلك متجانس ثقيل طوله l مثبت عند طرفه العلوى ($x=0$) بمحور رأسى . ويدور السلك حول هذا المحور بسرعة زاوية ثابتة ω . استنبط معادلة الذبذبات الصغيرة للسلك حول وضع اتزانه الرأسى .

$$\text{الجواب : } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(l-x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \omega^2 u \quad , \quad \text{حيث } \alpha^2 = g$$

٤ - استنبط معادلة الذبذبات المستعرضة فى الوسط الذى تتناسب مقاومته مع الدرجة الأولى للسرعة .

$$\text{الجواب : } \alpha^2 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \quad , \quad v_{xx} = \alpha^2 v_{xx} - k^2 v_{xx} \quad , \quad \alpha^2 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

٥ - استنبط الشروط الحدية لمعادلة الذبذبات الطولية لقضيب مرن (زنبرك) فى تلك الحالة عندما يكون الطرف العلوى للقضيب مثبتاً تيباً صلباً وبالطرف السفلى علق ثقل P ، إذا :

(أ) اعتبر وضع الاتزان هو حالة القضيب المجهدة تحت تأثير الثقل الثابت P المعلق بالطرف السفلى (الاستطالة الاستاتيكية) ،

(ب) اعتبر وضع الاتزان هو حالة القضيب غير المجهدة (على سبيل المثال - فى اللحظة الابتدائية ينسحب من تحت الثقل المسند فيبدأ الثقل فى العمل على استطالة القضيب) .

٦ - اكتب للمعادلة والشروط التى تحدد عملية اللذبذبات الاتوائية لقضيب مثبت بكرتان فى طرفيه .

الجواب : عند $x=0$ و $x=l$ يجب أن تتحقق شروط حدية على الصورة

$$\theta_{tt}(0, t) = \alpha_1^2 \theta_x(0, t), \quad \theta_{tt}(l, t) = -\alpha_2^2 \theta_x(l, t).$$

٧ - علق ثقل كتلته M فى نقطة ما $x=x_0$ من وتر ($0 \leq x \leq l$) . استنبط شروط الترافق فى النقطة $x=x_0$.

٨ - اكتب فى طرف قضيب مرن $x=l$ مثبت تيباً مرناً عند طرفه $x=0$. اكتب المعادلة والشروط التى تحدد عملية اللذبذبات الطولية للقضيب بافتراض أنه علاوة على ذلك تؤثر عليه قوة خارجية . ادرس حالتين :

(أ) القوة موزعة على طول القضيب بكتلة $F(x, t)$.

(ب) القوة مركزة في النقطة $x = x_0$ وتساوى $F_0(t)$.

٩- ادرس عملية الذبذبات الصغيرة لغاز مثالي في أنبوبة أسطوانية . استنبط أولاً معادلات الهيدروديناميكا الأساسية ثم افرض أن العملية ادياباتيّة . واستنبط المعادلة التفاضلية التي تحدد : (١) الكثافة ρ - (٢) الضغط p - (٣) جهد سرعة جسيمات الغاز U . (٤) السرعة v . (٥) إزاحة الجسيمات u . أورد أمثلة لتتحقق الشروط الحدية من كل من الأنواع الأول والثاني والثالث لهذه المعادلات .
١٠- اثبت علاقات التشابه بين عمليات الذبذبات الميكانيكية والصوتية والكهرتائية (انظر الملحق السادس للباب الثاني) .

١١- أورد أمثلة للشروط الحدية من كل من الأنواع الأول والثاني والثالث للمعادلات الطرغرافية .

١٢- ادرس مسألة الذبذبات الطولية لقضيب غير متجانس ($k = k_1$ عندما $x < x_0$ و $k = k_2$ عندما $x > x_0$) واستنبط شروط التوافق في نقطة التماس الجزئين غير المتجانسين من القضيب (عند $x = x_0$) .

١٣- وضع التفسير الفيزيائي للشرط الحدى

$$\alpha u_x(0, t) + \beta u_t(0, t) = 0.$$

١٤- أورد مثلاً لنموذج ميكانيكى تتحقق له المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + b u_t + c u.$$

بند ٢ - طريقة الموجات المنتشرة

فقرة ١ : علاقة دالمبرت . سنبدأ دراسة طرق تكوين حلول المسائل الحدية للمعادلات من النمط الزائدى بالمسألة ذات الشروط الابتدائية لوتر لانهاى :

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

نحول هذه المعادلة إلى الصورة القياسية التي تحتوى على مشتقة مختلطة (انظر الباب الأول) . معادلة المميزات :

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

تنقسم إلى معادلتين :

$$dx - a dt = 0, \quad dx + a dt = 0,$$

تكاملهما هما المستقيمان

$$x - at = C_1, \quad x + at = \bar{C}_2.$$

وبالاستعانة كالمعادلة بمتغيرين جديدين

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at,$$

نحول معادلة ذبذبات الوتر إلى الصورة :

$$u_{\xi\eta} = 0. \quad (3)$$

نعين التكامل العام للمعادلة الأخيرة . من الواضح أنه لأي حل للمعادلة (3) يكون

$$u_{\eta}(\xi, \eta) = f^*(\eta),$$

حيث $f^*(\eta)$ دالة ما في المتغير η . ويتكامل هذه المتساوية بالنسبة إلى η مع تثبيت ξ نحصل على :

$$u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad (4)$$

حيث f_1 و f_2 دالتان كل منهما في أحد المتغيرين ξ أو η فقط . وبالعكس فأيًا كانت الدالتان القابلتان للتفاضل مرتين f_1 و f_2 فإن الدالة $u(\xi, \eta)$ المحددة بالعلاقة (4) تكون هي عبارة عن حل للمعادلة (3) . وحيث إنه يمكن التعبير عن أى حل للمعادلة (3) في الصورة (4) عند الاختيار المناسب للدالتين f_1 و f_2 فإن العلاقة (4) تعتبر تكاملاً عاماً لهذه المعادلة . وبالتالي فالدالة

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \quad (5)$$

هي التكامل العام للمعادلة (1) .

نفرض أن حل المسألة محل البحث موجود. وعندئذ يعطى هذا الحل بالعلاقة (5). نعين الدالتين f_1 و f_2 بحيث تحققان الشروط الابتدائية :

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \quad (6)$$

$$u_t(x, 0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \quad (7)$$

وبتكامل المساوية الثانية نحصل على :

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C,$$

حيث C , x_0 ثابتان. ومن المساويتين

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C$$

نعين

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

وبذلك حددنا الدالتين f_1 , f_2 بدلالة الدالتين المعطاتين φ , ψ . علماً بأن المتساويتين (8) يجب أن تتحققا لأية قيمة للمتغير المستقل*.

وبالتعويض في (5) بقيمتي f_1 , f_2 الناتجتين نحصل على :

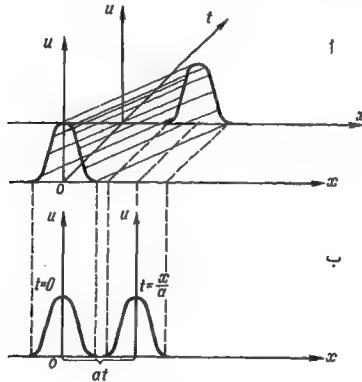
$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha) d\alpha \right\}$$

* في العلاقة (5) حددت الدالتان f_1 , f_2 تحديداً غير أحادى القيمة. فإذا طرحنا من f_1 وأضافنا إلى f_2 ثابتاً ما C_1 ، لن تغير u . وفي العلاقة (8) لا يتحدد الثابت C بدلالة φ , ψ ، غير أنه يمكن حله دون أن يغير ذلك من قيمة u . وعند جمع f_1 , f_2 ينحصر الحدان $C/2$, $-C/2$.

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (9)$$

وتسمى العلاقة (9) بعلاقة دالمبيرت ، وقد حصلنا عليها بافتراض وجود حل للمسألة المصاغة . وهذه العلاقة تثبت وحدانية الحل . بالفعل فلو وجد حل ثان للمسألة (2) — (1) لعبر عنه بالعلاقة (9) وبالتالي لانتطبق على الحل الأول .

وليس من العسير التأكد من أن العلاقة (9) تحقق (بفرض قابلية الدالة φ للتفاضل مرتين وقابلية ψ للتفاضل مرة واحدة) المعادلة والشروط الابتدائية . وبالتالي تثبت الطريقة المعروضة وحدانية وجود حل للمسألة المصاغة .



شكل ٤

فقرة ٢ : التفسير الفيزيائي . الدالة $u(x, t)$ المعرفة بالعلاقة (9) تعبر عن عملية انتشار الانحراف الابتدائي والسرعة الابتدائية . وإذا ثبت $t = t_0$ فإن الدالة $u(x, t_0)$ تعطي المقطع الجانبي للوتر في اللحظة t_0 . وبثبيت $x = x_0$ نحصل على الدالة $u(x_0, t)$ التي تعطي عملية الحركة في النقطة x_0 (شكل ٤) . نفرض أن الشخص الملاحظ موجود في النقطة $x = 0$ في اللحظة $t = 0$ ويتحرك بسرعة a

في الاتجاه الموجب. ندرج مجموعة إحداثيات مثبتة مع الملاحظ بفرض
 $t' = t$ و $x' = x - at$. وفي هذه المجموعة المتحركة للإحداثيات تكون الدالة
 $u(x, t) = f(x - at)$ معرفة بالعلاقة $u = f(x')$ وسيرى الملاحظ طول الوقت
 نفس المقطع الجانبي الذي رآه في اللحظة الابتدائية. وبالتالي فالدالة
 $f(x - at) = u(x, t)$ تعبر عن المقطع الجانبي غير المتغير $f(x)$ الذي يتحرك إلى
 اليمين (في الاتجاه الموجب) بسرعة a (الموجة المنتشرة أو الجارية). ومن الواضح أن
 الدالة $f(x + at)$ تعبر عن الموجة المنتشرة إلى اليسار (في الاتجاه السالب للمحور x)
 بالسرعة a . وبذلك فالحل العام (9) لمسألة كوشي للوتر اللانهائي هو تراكم موجتين
 $f_1(x + at) + f_2(x - at)$ إحداهما تنتشر إلى اليمين بالسرعة a والأخرى إلى اليسار
 بنفس السرعة. وعند ذلك يكون

$$\begin{aligned} f_1(x + at) &= \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \Psi(x + at), \quad f_2(x - at) = \\ &= \frac{1}{2} \varphi(x - at) - \Psi(x - at), \end{aligned}$$

حيث

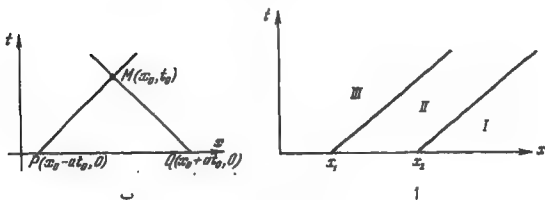
$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha.$$

ولتوضيح طابع الحل (9) يكون من المناسب الاستعانة بمستوى الخالات (x, t)
 أو «المستوى الطوري». والمستقيمان $x - at = \text{const}$ ، $x + at = \text{const}$ هما عبارة
 عن مميزتي المعادلة (1) (المستقيمين المميزين). والدالة $u = f(x - at)$ تحتفظ
 بقيمة ثابتة على امتداد الميزة $x - at = \text{const}$. أما الدالة $u = f(x + at)$
 فتكون ثابتة على امتداد الميزة $x + at = \text{const}$.

نفرض أن $f(x)$ مختلفة عن الصفر في الفترة (x_1, x_2) فقط وتساوي الصفر خارج
 هذه الفترة. نمد المميزتين $x - at = x_1$ ، $x - at = x_2$ من النقطتين $(x_1, 0)$ و
 $(x_2, 0)$ ، فتقسمان نصف المستوى $(x, t > 0)$ إلى ثلاث مناطق I, II, III
 (شكل 5، أ). والدالة $u = f(x - at)$ لا تساوي الصفر في المنطقة II فقط
 حيث $x_1 < x - at < x_2$. وتعتبر الميزتان $x - at = x_1$ ، $x - at = x_2$
 الجبهتين الأمامية والخلفية للموجة المنتشرة إلى اليمين.

ندرس الآن نقطة ما مثبتة (x_0, t_0) ونجد منها الميزتين $x - at = x_0 - at_0$ و $x + at = x_0 + at_0$ و $x_1 = x_0 - at_0$, $t = 0$ في النقطتين x فقطعان المحور x و $x_2 = x_0 + at_0$, $t = 0$ وقيمة الدالة $u = f_1(x - t) + f_2(x + at)$ في النقطة (x_0, t_0) تساوى $u(x_0, t_0) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ أى تحدد بقيمتي الدالتين $f_1(x)$, $f_2(x)$ في النقطتين $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ اللتين تعتبران رأسين للمثلث MPQ (شكل ٥ ب) المتكون بالميزتين والمحور x . وهذا المثلث يسمى بالمثلث المميز للنقطة (x_0, t_0) . ومن العلاقة (9) يتضح أن الانحراف $u(x_0, t_0)$ لنقطة الوتر في اللحظة t_0 يعتمد فقط على قيم الانحراف الابتدائي في الرأسين $P(x_0 - at_0, 0)$ و $Q(x_0 + at_0, 0)$ للمثلث المميز MPQ وعلى السرعة الابتدائية على الضلع PQ . ويتضح ذلك بجلاء إذا كتبنا العلاقة (9) على الصورة :

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{PQ} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (10)$$



شكل ٥

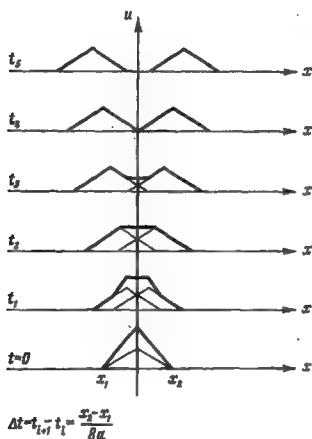
والمعطيات الابتدائية المعطاة خارج PQ لا تؤثر على قيمة $u(x, t)$ في النقطة $M(x_0, t_0)$. وإذا كانت الشروط الابتدائية معطاة لا على كل المستقيم اللانهاي وإنما على الجزء P_1Q_1 فإنها تحدد الحل تحديداً أحادى القيمة داخل المثلث المميز الذى تكون قاعدته الجزء P_1Q_1 .

فقرة ٣ : أمثلة . يمكن التعبير عن الحل (9) فى صورة المجموع $u = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ حيث

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)], \quad (11)$$

$$u_2(x, t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (12)$$

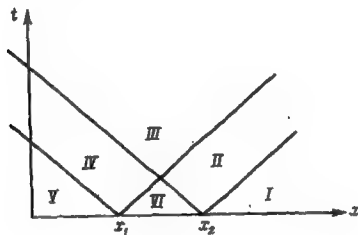
وإذا كانت السرعة الابتدائية مساوية للصفر ($\psi(x) = 0$) فإن الانحراف $u = u_1(x, t)$ يكون هو مجموع الموجتين الجاريتين اليسرى واليمنى ، علماً بأن الشكل الابتدائي لكل موجة يتحدد بالدالة $0.5\psi(x)$ المساوية لنصف الانحراف الابتدائي . أما إذا كان $\varphi(x) = 0$ فإن $u = u_2(x, t)$ تكون عبارة عن اضطراب الوتر الناشئ عن السرعة الابتدائية .



شكل ٦

مثال ١ : ندرس انتشار الانحراف الابتدائي المعطى في صورة مثلث متساوي الساقين . ويمكن الحصول على هذا المقطع الجانبي الابتدائي إذا شد الوتر من منتصف الفترة المغلقة $[x_1, x_2]$. وفي شكل ٦ بينت الأوضاع المتتالية للوتر بعد الفترات الزمنية $\Delta t = (x_2 - x_1)/8a$.

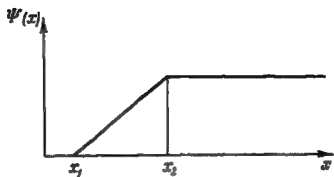
ويمكن الحصول على تصور واضح عن طابع عملية الانتشار بواسطة المستوى الطوري (x, t) . نعد الميزتين من كل من النقطتين $P(x_1, 0)$, $Q(x_2, 0)$ فتقسمان نصف المستوى $(-\infty < x < \infty, t \geq 0)$ إلى ست مناطق (شكل ٧). والانحراف $u_1(x, t)$ في أية نقطة (x, t) يعطى بالعلاقة (II). ولذا فالانحراف في المناطق I, III, V يساوى الصفر لأن المثلث المميز لأية نقطة في هذه المناطق لا يكون له نقط مشتركة مع الجزء $[x_1, x_2]$ الذى أعطيت عليه الشروط الابتدائية. وفي المنطقة II يكون الحل هو «الوجة اليمنى» $u = 0.5 \varphi(x - at)$ وفي المنطقة IV يكون الحل هو «الوجة اليسرى» $u = 0.5 \varphi(x + at)$ ويكون الحل في المنطقة VI هو مجموع الموجتين «اليسرى» و«اليمنى».



شكل ٧

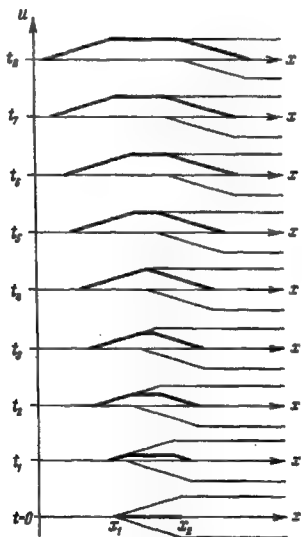
مثال ٢: نفرض أن الانحراف الابتدائي $\varphi(x) = 0$ ، والسرعة الابتدائية تختلف عن الصفر في الفترة المغلقة $[x_1, x_2]$ فقط ، حيث تأخذ فيها قيمة ثابتة ψ_0 : ψ_0 عندما $\psi(x) = 0$ ، $x_1 \leq x \leq x_2$ عندما $x < x_1$ و $x > x_2$. وفي هذه الحالة يكون الحل هو الدالة $u_2(x, t)$. نحسب الدالة $\Psi(x)$ ، مختارين عند ذلك $x_0 = 0$ (شكل ٨) :

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\alpha) d\alpha = \begin{cases} 0 & , \quad x < x_1, \\ (x - x_1) \psi_0 / 2a & , \quad x_1 \leq x \leq x_2, \\ (x_2 - x_1) \psi_0 / 2a & , \quad x > x_2. \end{cases} \quad (13)$$



شكل ٨

والحل $u_2(x, t)$ هو الفرق بين الموجتين اليمنى واليسرى بالمقطع الجانبي $\psi(x)$. وبينت الأوضاع المتتالية لهاتين الموجتين خلال الفترات الزمنية $\Delta t = (x_2 - x_1)/8a$ في شكل ٩. والمقطع الجانبي للوتر عند $t \geq 4\Delta t$ يكون على شكل شبه منحرف



$$\Delta t = t_{10} - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{8a}$$

شكل ٩

يتوسع بانتظام بمرور الزمن . وإذا لم تكن $\Psi(x)$ ثابتة على $[x_1, x_2]$ فإن المقطع الجانبي $\Psi(x)$ هو فقط الذى سيتغير .

ولتوضيح طابع الحل نستعين بالمستوى الطورى (x, t) (شكل ٧) . نكتب صيغ $u(x, t)$ فى المناطق المختلفة للمستوى الطورى .

فى المنطقة I $(x - at > x_2)$

$$\Psi(x + at) = \Psi(x - at) = \text{const}, \quad u(x, t) = 0.$$

فى المنطقة V $(x + at < x_1)$

$$\Psi(x - at) = \Psi(x + at) = 0, \quad u(x, t) = 0.$$

فى المنطقة III $(x - at < x_1, x + at > x_2)$

$$\Psi(x + at) = \text{const} = \frac{x_2 - x_1}{2a} \psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = 0, \quad u(x, t) = \frac{x_2 - x_1}{2a} \psi_0.$$

فى المنطقة II $(x_1 < x - at < x_2, x + at > x_2)$

$$\Psi(x + at) = \frac{x_2 - x_1}{2a} \psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = \frac{x - at - x_1}{2a} \psi_0, \quad u(x, t) = \frac{x_2 - (x - at)}{2a} \psi_0.$$

فى المنطقة IV $(x_1 < x + at < x_2, x - at < x_1)$

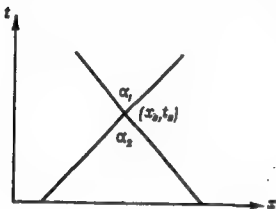
$$\Psi(x + at) = \frac{x + at - x_1}{2a} \psi_0, \quad \Psi(x - at) = 0, \quad u(x, t) = \frac{x + at - x_1}{2a} \psi_0.$$

فى المنطقة VI $(x - at > x_1, x + at < x_2)$

$$\Psi(x + at) = \frac{x + at - x_1}{2a} \psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = \frac{x - at - x_1}{2a} \psi_0, \quad u(x, t) = t \psi_0.$$

مثال ٣ : ندرس مسألة ذبذبة الوتر تحت تأثير دفع مركز. وبإكساب نقط الوتر $(x, x + \Delta x)$ سرعة ثابتة ψ_0 في اللحظة الابتدائية (مثلاً بالدق على الوتر بطريقة) تؤثر بذلك على هذا الجزء من الوتر بدفع I يساوى التغير في كمية الحركة عند $t = 0$ ، ومن ثم فإن $I = \rho \Delta x \psi_0$ حيث ρ الكثافة الخطية للوتر. وبذلك فيجب علينا حل مسألة ذبذبة الوتر بانحراف ابتدائي يساوى صفراً وسرعة ابتدائية $\psi_0 = I_0/\rho = \psi_0$ في الفترة $(x, x + \Delta x)$ ، و $\psi = 0$ خارج هذه الفترة ، وهنا $I_0 = I/\Delta x$ هو كثافة الدفع. وقد ورد تحليل لحل هذه المسألة عند حل المثال ٢. والانحراف الذى يسببه الدفع الموزع على الفترة $(x, x + \Delta x)$ يكون عند $t > \Delta x/2a$ هو عبارة عن شبه منحرف قاعدته السفلى $2at + \Delta x$ وقاعدته العليا $2at - \Delta x$. وبالاتقال إلى النهاية



شكل ١٠

عندما $\Delta x \rightarrow 0, I_0 = \text{const}$ فترى أن الانحراف يكون مساوياً للصفر خارج $(x - at, x + at)$ ومساوياً $I/2ap$ داخل هذه الفترة. ويمكن الاصطلاح على أن الانحرافات يسببها الدفع النقطى I (point impulse).

ندرس المستوى الطورى (x, t) ونعتمد من النقطة (x_0, t_0) المميزتين :

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0$$

(شكل ١٠) فتحددان زاويتين α_1, α_2 تسميان بالزاويتين المميزتين العليا والسفلى على الترتيب للنقطة (x_0, t_0) .

ويسبب تأثير الدفع النقطى فى النقطة (x_0, t_0) انحرافاً مساوياً $\frac{1}{2a} \frac{I_0}{\rho}$ داخل الزاوية المميزة العليا ومساوياً الصفر خارجها.

فقرة ٤ : المعادلة غير المتجانسة. ندرس مسألة كوشى لمعادلة الذبذبات غير المتجانسة

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a^2} u_{tt} &= u_{xx} + f(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \\ -\infty < x < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

نفرض أن $w_f(x, t; \tau)$ حل مسألة كوشي المساعدة

$$\frac{1}{a^2} (w_f)_{tt} = (w_f)_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > \tau \quad (15)$$

$$w_f(x, \tau; \tau) = 0, \quad \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, \tau; \tau) = f(x, \tau), \quad t = \tau, \quad -\infty < x < \infty. \quad (16)$$

وتعطينا علاقة دالمبرت (9) :

$$w_f(x, t; \tau) = w_f(x, t - \tau; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (17)$$

نكتب علاقة دالمبرت (9) على الصورة

$$u(x, t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x, t; 0) + w_\psi(x, t; 0), \quad (18)$$

حيث

$$w_\psi(x, t; 0) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \quad w_\varphi(x, t; 0) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi$$

هما حلا المسألة (16) , (15) عند $\tau = 0$ و $f = \varphi(x)$, $\dot{f} = \psi(x)$ على الترتيب لأن عملية التفاضل مباشرة توضح أن

$$\frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x, t; 0) = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}.$$

نثبت أن المأخوذة التالية صحيحة :

يكون حل المعادلة غير المتجانسة (14) بالشروط الابتدائية الصفرية
 $u(x, 0) = 0$ و $u_t(x, 0) = 0$ الصورة

$$u(x, t) = a^2 \int_0^t w_f(x, t; \tau) d\tau. \quad (19)$$

وبتفاضل الدالة (19) والأخذ في الاعتبار الشروط (16) للدالة $w_f(x, t; \tau)$
 نحصل على :

$$u_t(x, t) = a^2 w_f(x, t; t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t; \tau) d\tau = a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t; \tau) d\tau, \quad (20)$$

$$u_{tt}(x, t) = a^2 \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t; t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau =$$

$$= a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau + a^2 f(x, t),$$

$$u_{xx} = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2}(x, t; \tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau.$$

ومن هنا يتضح أن الدالة (19) تحقق المعادلة (14) . ومن العلاقتين (20) , (19)
 يتبع مباشرة أنه يمكن التعبير عن حل المسألة (14) وفقاً للعلاقتين (18) و (19) على
 الصورة :

$$u(x, t) = \frac{\partial w_\psi}{\partial t}(x, t; 0) + w_\psi(x, t; 0) + a^2 \int_0^t w_f(x, t; \tau) d\tau. \quad (21)$$

وبالاستعانة بالصيغة (17) للدالة w_f نحصل على :

$$u(x, t) = \frac{\psi(x+at) + \psi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{a}{2} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (22)$$

وبوضوح التعويض المباشر بالعلاقة (22) في (14) أن الدالة (22) بالفعل تعبر

حلاً للمسألة (14) إذا وجدت المشتقات $\partial f / \partial x$ و $\psi'(x)$ و $\varphi''(x)$.

ويستج من العلاقة (17) أن الدالة w تحقق المعادلة عندما $t = \tau$ إذا كانت f قابلة للتفاضل بالنسبة إلى x أى أن التعبير (21) يكون ممكناً عند تحقق نفس الشروط التى يوجد عندها حل مسألة كوشى.

وتوضح العلاقة (21) أن حل المسألة العامة (14) يمكن أن يكتب مباشرة إذا كان لدينا حل للمسألة المساعدة (16) - (15). وتحقق علاقة مماثلة لمسألة كوشى في الفراغ اللانهائى (انظر الباب الأول من الجزء الثانى).

فقرة ٥ : استقرار الحلول. حل المعادلة (1) يتحدد تحديداً أحادى القيمة بالشروط الابتدائية (2). ثبت أن هذا الحل يتغير باتصال في حالة التغير المتصل للشروط الابتدائية.

أياً كانت الفترة الزمنية $[0, t_0]$ ، وأياً كانت درجة الدقة ε ، يوجد ذلك العدد $\delta(\varepsilon, t_0)$ بحيث إن أى حلين للمعادلة (1): $u_1(x, t)$ ، $u_2(x, t)$ سيختلفان عن بعضهما خلال الفترة الزمنية t_0 بأقل من ε :

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon \quad (0 \leq t \leq t_0).$$

بمجرد أن تختلف الشروط الابتدائية

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(x) \end{array} \right. \quad , \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = \psi_1(x) \end{array} \right.$$

عن بعضها بأقل من δ :

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta; \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta.$$

وإثبات هذه النظرية بسيط للغاية. الدالتان $u_1(x, t)$ ، $u_2(x, t)$ ترتبط كل منها بشروطها الابتدائية بالعلاقة (9) ومن ثم فإن

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)|}{2} + \frac{|\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)|}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha)| d\alpha,$$

ومن هنا نحصل على

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a} \delta \cdot 2at \leq \delta(1 + t_0),$$

مما يثبت فرض النظرية إذا وضعنا

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + t_0}.$$

إن أية عملية فيزيائية معينة تتطور بالزمن يجب أن تميز بدوال تعتمد اعتمادًا متصلًا على المعطيات الابتدائية. ولو لم يتحقق هذا الاعتماد المتصل لأصبح من الممكن للعمليتين المختلفتين اختلافًا جوهريًا أن تناظرا مجموعتين من الشروط الابتدائية متشابهتين عمليًا (ينحصر الاختلاف بينها في حدود دقة القياسات). ولا يمكن اعتبار العمليات من هذا النوع محددة «فيزيائيًا» بمثل هذه الشروط الابتدائية. ويتج من النظرية السابقة أن عملية ذبذبات الوتر ليست محددة رياضيًا فحسب وإنما تكون أيضًا محددة فيزيائيًا بالشروط الابتدائية.

وإذا كان حل المسألة الرياضية يعتمد اعتمادًا متصلًا على الشروط الإضافية (على المعطيات الابتدائية والحدية وعلى الطرف الأيمن للمعادلة أى على المعطيات الأصلية للمسألة) فإنه يقال بأن المسألة مستقرة.

ونظرًا لدراسة الظواهر الفيزيائية المحددة يستعان بمفهوم انضباط الصياغة (correctness). فيقال إن المسألة الرياضية مضبوطة الصياغة إذا كان: (١) حل المسألة موجودًا ، (٢) للمسألة حل وحيد ، (٣) حل المسألة يعتمد اعتمادًا متصلًا على المعطيات الأصلية ، أى يكون الحل مستقرًا .

ونشير إلى أن المسائل الرياضية غير مضبوطة الصياغة تقابلنا كثيرًا في التطبيقات ، وتنتمى إلى عدادها كثير من المسائل الرياضية المعروفة .

نورد مثالاً لمسألة غير مضبوطة الصياغة حلها غير مستقر .

الدالة $u(x, y)$ التي تعتبر حلاً لمعادلة لابلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ تتحدد تحديداً
أحادي القيمة بشروطها الابتدائية * $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_y(x, 0) = \psi(x)$.
ندرس الدالتين $u^{(1)}(x, y) = 0$, $u^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \cdot \cosh \lambda y$ اللتين تحققان
معادلة لابلاس. وتعتمد الدالة $u^{(2)}(x, y)$ على λ كبارامتر. والقيم الابتدائية

$$u^{(1)}(x, 0) = 0, \quad u^{(2)}(x, 0) = \varphi(x) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x,$$

$$u_y^{(1)}(x, 0) = 0, \quad u_y^{(2)}(x, 0) = \psi(x) = 0$$

تختلف عن بعضها اختلافاً طفيفاً للغاية (بأى مقدار صغير نريده) عند القيم الكبيرة
كبراً كافياً للبارامتر λ . غير أن الحل $u^{(2)}(x, y)$ يمكن عند ذلك أن يصبح كبيراً
ل للغاية (أى كبر نريده) مهما كانت قيمة y المثبتة. وبالتالي فالمسألة بالشروط
الابتدائية لمعادلة لابلاس تكون غير مضبوطة الصياغة.

ومن الطبيعي أن يتبادر إلى الذهن تساؤل عما إذا كانت المسائل غير مضبوطة الصياغة يمكن بوجه عام أن
تناظر مسائل تشكل أهمية ما للفيزياء. وأيضاً أية قيمة علمية يمكن أن يشكلها الحل التقريبي للمسائل غير
مضبوطة الصياغة فالأخطاء الصغيرة في شروط المسائل يمكن أن تناظرها أخطاء كبيرة في الحل؟

وتنشأ مثل هذه الشكوك نتيجة لأننا نقصد فيا ذكرنا أعلاه أنه بمثابة الحل التقريبي للمسألة يؤخذ الحل
التيقني للمسألة المناظرة للشروط القريبة.

نورد مثلاً مسألة غير مضبوطة الصياغة ذات أهمية عملية كبيرة.

ندرس مسألة تعيين المشتقة $z(x) = \frac{df}{dx}$ بالقيم التقريبية المنتظمة للدالة $f(x)$. نفرض أن معيار الدقة
عند إعطاء $\tilde{f}(x)$ وتعيين $\tilde{z}(x)$ يحدد كما يلي:

$$\max |\tilde{f}(x) - f(x)|, \quad \max |\tilde{z}(x) - z(x)|.$$

ومن الواضح أن هذه المسألة وفقاً لمصطلحاتنا السابقة هي مسألة غير مستقرة (غير مضبوطة الصياغة).
بالقول ϵ فإذا كان $\tilde{f}(x) = f(x) + \delta \cos \omega x$ فإن $\max |\tilde{f}(x) - f(x)| = \delta$ عند قيم δ
الصغيرة. غير أنه إذا اخترنا المشتقة الدقيقة للدالة $\tilde{f}(x)$ بمثابة القيمة التقريبية $\tilde{z}(x)$ لحصلنا على

$$\tilde{z}(x) = \tilde{f}'(x) = f'(x) - \delta \omega \sin \omega x, \quad \max |\tilde{z}(x) - z(x)| = \delta \omega;$$

• هذه الشروط تحدد حل معادلة لا بلاس تحديداً رياضياً أحادي القيمة. بالفعل فإعطاء $u_y(x, 0)$
يكافئ $u_x(x, 0)$ حيث $v(x, y)$ دالة مرافقة توافقياً للدالة $u(x, y)$. وبهذا تتحدد تحديداً أحادي القيمة.
بدقة ثابت فقط. الدالة التحليلية التي يكون قسمها الحقيقي هو الدالة $u(x, y)$ (انظر الباب الرابع - بند ١
فقرة ٤).

و يمكن عند قيمة δ المثبتة وقيم ϵ الكبيرة أن يصبح عددًا كبيرًا أى كبير نريد. غير أنه من المعلوم جيدًا أنه بمثابة القيمة التقريبية للمشتقة تؤخذ العلاقة الفرقية $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ التى تعبر عن المشتقة المطلوبة بخطأ صغير أى صغر نريد. عندما يكون h و δ/h صغيرين صغراً كافياً. ومن المفهوم عند ذلك أنه للحصول على تقرب جيد للمشتقة df/dx من القيمة التقريبية للدالة $f(x)$ يجب أن يكون الخطأ δ صغيراً صغراً كافياً.

وهكذا فى المثال المعروض يمكن رغم عدم استقرار المسألة - ذكر طريقة للحصول على تقريبات ذات دقة عالية بأية درجة نريدها للحل المطلوب من الشروط التقريبية للمسألة ذات الدقة الكافية. ويعتبر مثل هذا الوضع نموذجياً لكثير من المسائل غير مضبوطة الصياغة.

والمسائل غير المضبوطة الصياغة كثيراً ما تقابلنا فى الفيزياء عند دراسة نماذج غير قابلة للبحث أو الفحص (للقياس) بشكل مباشر. وفى هذه الحالات نضطر إلى عمل استنتاجات معينة عن مميزات « z » هذه النماذج وفقاً لظواهرها غير المباشرة (المحددة فيزيائياً) « u » والتى يمكن قياسها فى التجارب العملية - وهى ترتبط بالمميزات « z » بارتباط دالى على الصورة « $u = A_z$ ». ونتيجة لذلك نصل إلى مسألة معالجة نتائج التجارب التى تعتبر مسألة عكسية وتتحصر فى تعيين المميزات « z » للنماذج محل البحث وفقاً لمعطيات التجارب « u ». وكثير من هذه المسائل ليست مضبوطة الصياغة. وكحالة خاصة فمسألة كوشى المصاغة أعلاه لمعادلة لابلاس يكون لها علاقة مباشرة بمسألة القياس الوزنى العكسية (تعيين شكل الجسم بما يسببه من تفاوت فى قياس مقدار قوة الجاذبية). ويعتبر المثال الوارد أعلاه لحساب المشتقة وفقاً للقيم التقريبية للدالة مثالاً نموذجياً فى كثير من التجارب حيث تجرى القياسات بطريقة التراكم.

نشير الآن إلى الموضوع التالى. من الواضح أن الدالة « $u(x, t)$ » المعرفة بالعلاقة (9) يمكن أن تكون حلاً للمعادلة (1) فقط فى تلك الحالة عندما تكون الدالة « $\psi(x)$ » قابلة للتفاضل، والدالة « $\varphi(x)$ » قابلة للتفاضل مرتين. ويتضح مما ذكر أن الدالتين المبينتين فى شكل ١١، ١٢ لا يمكن اعتبارهما حلاً للمعادلة (1)، لأنها ليستا



شكل ١٢



شكل ١١

قابلتين للتفاضل مرتين فى كل مكان. وعلاوة على ذلك يمكن القول بأن حل معادلة الذبذبات الذى يحقق الشروط (2) لا يكون موجوداً إذا لم يكن للدالتين « $\psi(x)$ »، « $\varphi(x)$ » المشتقات الضرورية. بالفعل فبتكرار التحليل الذى أوصلنا إلى العلاقة (9) يمكننا القول بأنه إذا وجد حل لمعادلة الذبذبات فيجب التعبير عنه بالعلاقة (9). أما إذا لم تكن الدالتان « ψ »، « φ » قابلتين للتفاضل عدداً كافياً من المرات فإن

العلاقة (9) ستحدد دالة لا تحقق المعادلة (1) ، أى أنه لا يوجد حل لهذه المسألة .
غير أنه إذا تغيرت الشروط الابتدائية تغيراً طفيفاً بالتعويض عنها بدالتين قابلتين للتفاضل $\psi(x)$, $\varphi(x)$ فإن هذه الشروط الابتدائية سينظرها حل للمعادلة (1) .
وبالإضافة إلى ذلك نشير إلى أننا عند إثبات نظرية هذه الفقرة قد أثبتنا فعلياً أن الدوال المحددة بالعلاقة (9) تعتمد اعتماداً متصلاً على الدالتين الابتدائيتين φ, ψ (دون أن يتوقف ذلك على ما إذا كانت هاتان الدالتان قابلتين للتفاضل أم لا) .
وبذلك فإذا لم ينظر دالتين ما φ, ψ حل لمعادلة الذبذبات يحقق الشروط (2) فإن الدالة المحددة بالعلاقة (9) تكون هي عبارة عن نهاية حلول معادلة الذبذبات التى جعلت شروطها الابتدائية أكثر ملوسة (smoothness) . والدوال الناتجة من هذا الانتقال إلى النهاية تسمى بالحلول المعممة . ويلعب مفهوم الحلول المعممة دوراً مهماً فى الفيزياء وقد أدخله العالم السوفييتى س . سوبوليف .

فقرة ٦ : المستقيم نصف اللانهائى وطريقة الاستكمال . ندرس مسألة انتشار الموجات على مستقيم نصف لانهائى (نصف لا محدود) $x \geq 0$. وهذه المسألة ذات قيمة هامة خاصة عند دراسة عملية انعكاس الموجات عن طرف المستقيم وتصاغ بالطريقة التالية :

عين حل معادلة الذبذبات

$$, t > 0, 0 < x < \infty \text{ عند } a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

الذى يحقق الشرط الحدى

$$, (t \geq 0) \quad (u_x(0, t) = v(t) \text{ أو } u(0, t) = \mu(t))$$

والشرطين الابتدائيين

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq x < \infty).$$

ندرس فى البداية حالة الشرط الحدى المتجانس

$$, u_x(0, t) = 0 \text{ أو } u(0, t) = 0$$

أى مسألة انتشار الاضطراب الابتدائي في وتر ذي طرف مثبت $x=0$ (أو طرف حر).

نذكر المأخوذتين التاليتين عن خواص حلول معادلات الذبذبات المعرفة على مستقيم لانهاى .

١- إذا كانت المعطيات الابتدائية في مسألة انتشار الذبذبات على مستقيم لانهاى (المسألة (2) — (1)) دوال فردية بالنسبة إلى نقطة ما x_0 فإن الحل المناظر في هذه النقطة يكون مساوياً للصفر.

٢- إذا كانت المعطيات الابتدائية في مسألة انتشار الذبذبات على مستقيم لانهاى (المسألة (2) — (1)) دوال زوجية بالنسبة إلى نقطة ما x_0 فإن مشتقة الحل المناظر في هذه النقطة بالمتغير x تكون مساوية للصفر.

نثبت المأخوذة ١. نعتبر x_0 نقطة الأصل ، $x_0=0$. في هذه الحالة تكب شروط فردية المعطيات الابتدائية على الصورة :

$$\varphi(x) = -\varphi(-x); \quad \psi(x) = -\psi(-x).$$

والدالة $u(x, t)$ المعرفة بالعلاقة (9) ، عند $x=0$ ، $t > 0$ تساوى

$$u(0, t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(a) da = 0,$$

وذلك لأن الحد الأول يساوى صفراً وفقاً لفردية $\varphi(x)$ ، والحد الثانى يساوى صفراً لأن تكامل الدالة الفردية بالحددين المتماثلين بالنسبة لنقطة الأصل يساوى دائماً الصفر.

وبالمثل نثبت المأخوذة الثانية ، فشروط زوجية المعطيات الابتدائية تأخذ الصورة :

$$\varphi(x) = \varphi(-x); \quad \psi(x) = \psi(-x).$$

ونشير إلى أن مشتقة الدالة الزوجية تكون دالة فردية :

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x).$$

ومن العلاقة (9) يتتج أن

$$u_x(0, t) = \frac{\psi'(at) + \psi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a} [\psi(at) - \psi(-at)] = 0, \quad t > 0,$$

لأن الحد الأول يساوى صفراً وفقاً لفردية $\psi'(x)$ ، والحد الثاني يساوى صفراً وفقاً لزوجية $\psi(x)$.

وفعلياً يستند الإثبات الوارد أعلاه على علاقة دالمبرت ولا يرتبط بقابلية الدالة $u(x, t)$ للتفاضل مرتين . وبذلك أثبتنا أن المأخوذة الأولى صحيحة لأية دوال يمكن التعبير عنها بعلاقة دالمبرت . والمأخوذة الثانية صحيحة للدوال على نفس الصورة وللدالة $\psi(x)$ القابلة للتفاضل أى للحلول المعممة للمسألة (2) — (1) .

وبمساعدة هاتين المأخوذتين يمكن حل المسائل التالية :

المطلوب تعيين حل المعادلة (1) ، الذى يحقق الشروط الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} 0 < x < \infty, \quad (2')$$

والشرط الحدى

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

(المسألة الحدية الأولى) .

ندرس الدالتين $\Phi(x)$ و $\Psi(x)$ اللتين تعتبران استكمالين فرديين للدالتين $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ اللتين تدخلان فى الشرط (2') :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , x > 0, \\ -\varphi(-x) & , x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & , x > 0, \\ -\psi(-x) & , x < 0. \end{cases}$$

هاتان المأخوذتان نتيجة لكون الدالة $u(x, t)$ المعرّفة بعلاقة دالمبرت عند $t > 0$ زوجية (أو فردية) . إذا كانت المعطيات الابتدائية زوجية (أو فردية) (ونترك للقارئ إثبات ذلك بمفرده) . ومن الواضح هندسياً أن الدالة الفردية المتصلة ومشتقة الدالة الزوجية القابلة للتفاضل تساويان الصفر عند $x = 0$.

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha$$

معرفة لجميع x و $t > 0$. ووفقاً للمأخوذة الأولى يكون

$$u(0, t) = 0.$$

وفضلاً عن ذلك فإن هذه الدالة عند $t = 0$ ، $x > 0$ تحقق الشروط الابتدائية :

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \Psi(x) = \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad x > 0.$$

وبذلك فبدراسة الدالة الناتجة $u(x, t)$ فقط للقيم $x > 0$ ، $t \geq 0$ نحصل على دالة تحقق جميع شروط المسألة المصاغة.

وبالعودة إلى الدوال الأولى يمكن كتابة :

$$u(x, t) = \left\{ \begin{aligned} &\frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \quad , \quad t < \frac{x}{a}, \quad x > 0 \\ &\frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \quad , \quad t > \frac{x}{a}, \quad x > 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

وفي المنطقة $t < x/a$ لا يظهر تأثير الشروط الحدية وتنطبق صيغة $u(x, t)$ على الحل (9) لحالة المستقيم اللانهائي.

وبالمثل ، فإذا كان لدينا عند $x = 0$ طرف حر

$$u_x(0, t) = 0,$$

فبأخذ الاستكمال الزوجي لكل من الدالتين $\varphi(x)$ ، $\psi(x)$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , x > 0, \\ \varphi(-x) & , x < 0; \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & , x > 0, \\ \psi(-x) & , x < 0, \end{cases}$$

نحصل على حل معادلة الذبذبات :

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha$$

أو

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha & , t < \frac{x}{a}, \\ \frac{\varphi(x+at) + \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \left\{ \int_0^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \int_0^{at-x} \psi(\alpha) d\alpha \right\} & , t > \frac{x}{a}, \end{cases}$$

الذى يحقق فى المنطقة $x \geq 0$ الشروط الابتدائية (2) والشروط الحدى $u_x(0, t) = 0$

وفى المستقبل سنلجأ كثيراً عند حل مختلف المسائل إلى الاستعانة بطريقة استكمال المعطيات الابتدائية ، المحددة على جزء معين من المنطقة ، إلى المنطقة اللانهائية .

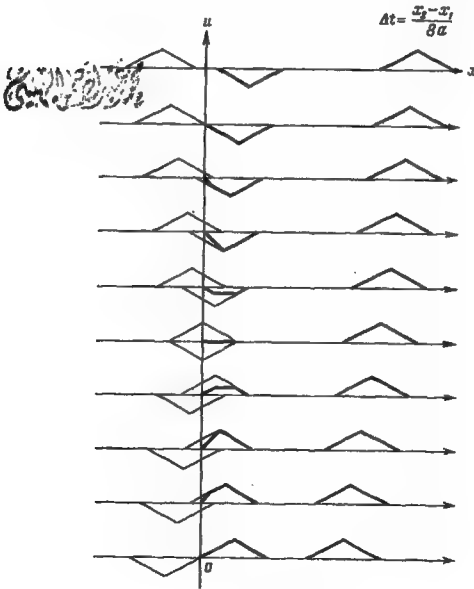
ولذا نبوغ مرة أخرى النتائج التى حصلنا عليها فى صورة قاعدتين :

لحل المسألة على مستقيم نصف محدود بشرط حدى $u(0, t) = 0$ يجب استكمال المعطيات الابتدائية على كل المستقيم استكمالاً فردياً .

ولحل المسألة على مستقيم نصف محدود بشرط حدى $u_x(0, t) = 0$ يجب استكمال المعطيات الابتدائية على كل المستقيم استكمالاً زوجياً .

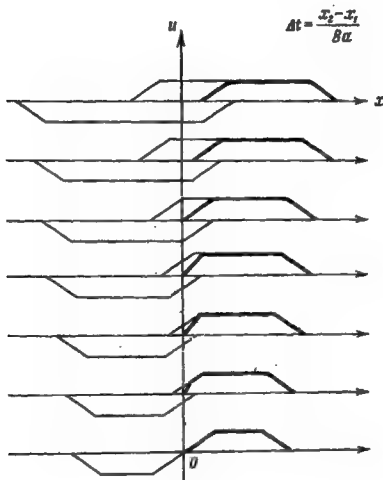
لندرس مثالين . نفرض أن المعطيات الابتدائية على مستقيم نصف محدود مثبت

عند $x = 0$ تكون مختلفة عن الصفر فقط في الفترة (a, b) ، $0 < a < b$ التي يمثل فيها الانحراف الابتدائي المعطى بالدالة $\varphi(x)$ بمثلث متساوي الساقين و $\psi(x) = 0$. ويتبع حل هذه المسألة إذا ما استكملت المعطيات الابتدائية فريدًا على المستقيم اللانهائي . وعملية انتشار الموجات مبينة في شكل ١٣ . وفي البداية تحدث العملية تمامًا كما تحدث على المستقيم اللانهائي . والانحراف المعطى ينقسم إلى موجتين تتحركان في ناحيتين بسرعة ثابتة ، علمًا بأن هذا يستمر حتى يصل نصف الموجة المتجه يسارًا إلى النقطة $x = 0$ (شكل ١٣) . وفي هذه اللحظة فعلى الناحية اليسرى ($x \leq 0$) حيث تحدث عمليات مماثلة يصل إلى النقطة $x = 0$ نصف موجة « بطور عكسي » . وفي اللحظات التالية يحدث انعكاس لنصفي الموجتين عن الطرف



شكل ١٣

المثبت . وتبين هذه العملية بالتفصيل على الرسم في شكل ١٣ . فيتقاصر المقطع الجانبي للموجة المنعكسة وتختفي الانحرافات ثم تظهر بإشارة عكسية . وأخيرًا يسير نصف الموجة المنعكس إلى اليمين وراء نصف الموجة الذي مر هناك بنفس السرعة . وهكذا فعند انعكاس الموجة عن الطرف المثبت للوتر يغير انحرافها إشارته .



شكل ١٤

ندرس المثال الثاني . نفرض أنه على المستقيم نصف اللانهاي $x \geq 0$ المثبت عند $x = 0$ يكون الانحراف الابتدائي مساويًا للصفر في كل مكان ، أما السرعة الابتدائية $\psi(x)$ فتكون مختلفة عن الصفر فقط في الفترة $(0 < x_1 < x_2)$ ، علمًا بأن $\psi(x) = \text{const}$ في هذه الفترة . نستكمل المعطيات الابتدائية استكمالاً فرديًا . ومن كل فترة من الفترتين (x_1, x_2) و $(-x_1, -x_2)$ تنتشر انحرافات مشابهة لتلك المبينة في شكل ١٤ . وكما يتضح من الرسم تحدث العملية في المرحلة الأولى في المنطقة $x > 0$ تمامًا كما تحدث على المستقيم اللانهاي . ثم يحدث انعكاس عن

الطرف المثبت وأخيرًا تتحرك الموجة التي يكون مقطعها الجانبي على شكل شبه منحرف متساوي الساقين إلى اليمين بسرعة ثابتة .

ونجرب دراسة الانعكاس عن الطرف الحر بطريقة مماثلة ، ولكن المعطيات الابتدائية يجب استكمالها زوجيًا ، ومن ثم يحدث انعكاس الموجة عن الطرف الحر لا بطور قد تغير وإنما بنفس الطور .

لقد درسنا مسائل بشروط حدية متجانسة

$$u(0, t) = \mu(t) = 0$$

أو

$$u_x(0, t) = v(t) = 0.$$

وفي الحالة العامة للشروط الحدية غير المتجانسة يمثل الحل في صورة مجموع يحقق كل حد فيه شرطًا واحدًا فقط من شروط المسألة المصاغة (إما شرطًا حديًا وإما ابتدائيًا) .

وننتقل الآن إلى حل المعادلة عند الشروط الابتدائية الصفرية والشرط الحدي المعطى

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, 0) &= 0, \quad \bar{u}_t(x, 0) = 0, \\ \bar{u}(0, t) &= \mu(t), \quad t > 0. \end{aligned}$$

من الواضح أن النظام الحدي يحدث موجة تنتشر على امتداد الوتر إلى اليمين بسرعة a مما يجعلنا نتنبأ بالصورة التحليلية للحل :

$$\bar{u}(x, t) = f(x - at).$$

نعين الدالة f من الشرط الحدي

$$\bar{u}(0, t) = f(-at) = \mu(t),$$

ومنها

$$f(z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right).$$

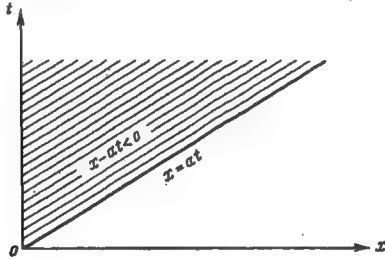
ومن ثم

$$\bar{u}(x, t) = \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

غير أن هذه الدالة معرفة فقط في المنطقة $x - at \leq 0$ لأن $\mu(t)$ معرفة للقيم $t \geq 0$. وفي شكل ١٥ تمثل هذه المنطقة بالجزء المخطط من المستوى الطوري. ولتعيين $\bar{u}(x, t)$ لجميع قيم المتغيرين المستقلين نستكمل الدالة $\mu(t)$ إلى القيم السالبة للمتغير t ، بفرض $\mu(t) = 0$ للقيم $t < 0$. عندئذ تكون الدالة

$$\bar{u}(x, t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

معرفة لجميع قيم المتغيرين المستقلين وتحقق الشروط الابتدائية الصفرية.



شكل ١٥

ومجموع هذه الدالة والدالة (23) المعرفة في بداية هذه الفقرة هو عبارة عن حل المسألة الحدية الأولى لمعادلة الذبذبات المتجانسة. وللوتر نصف المحدود يكون :

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, & t < \frac{x}{a}, \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, & t > \frac{x}{a}. \end{cases} \quad (24)$$

وبالمثل يمكن تكوين حل المسألة الحدية الثانية . أما فيما يتعلق بالمسألة الحدية الثالثة فانظر الفقرة ٩ .

ونكتفي هنا بحل المسألة الحدية للمعادلة المتجانسة للذبذبات . وفيما يخص حل المعادلة غير المتجانسة انظر الفقرة ٩ .

فقرة ٧ : المسائل للفترة المغلقة المحدودة . ندرس المسائل الحدية للفترة المحدودة $(0, l)$. سنبحث عن حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

الذى يحقق الشروط الحدية

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0$$

والشروط الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l.$$

ندرس في البداية حالة الشروط الحدية المتجانسة

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

سنبحث عن حل المسألة في هذه الحالة بطريقة الاستكمال بافتراض إمكانية التمثيل التالى :

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(a) da,$$

حيث Φ و Ψ دالتان ينبغي تعيينها . والشروط الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \Psi(x) = \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l$$

تعرف قيم Φ و Ψ في الفترة $(0, l)$.

ولتحقيق الشروط الحدية الصفرية نتطلب أن تكون الدالتان $\Phi(x)$ و $\Psi(x)$ فرديتين بالنسبة للنقطتين $x=0$, $x=l$:

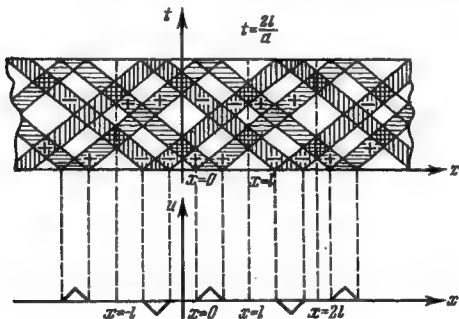
$$\begin{aligned}\Phi(x) &= -\Phi(-x), & \Phi(x) &= -\Phi(2l-x), \\ \Psi(x) &= -\Psi(-x), & \Psi(x) &= -\Psi(2l-x).\end{aligned}$$

وبالمقارنة بين هذه المتساويات نحصل على

$$\Phi(x') = \Phi(x' + 2l) \quad (x' = -x)$$

وبالمثل للدالة $\Psi(x)$ ، أى أن الدالتين Φ , Ψ تعتبران دالتين دوريتين بفترة دورية $2l$.

وليس من الصعب ملاحظة أن شروط الفردية بالنسبة إلى نقطة الأصل وشروط الدورية تحدد استكمال $\Phi(x)$ و $\Psi(x)$ على المستقيم $-\infty < x < \infty$.
 بالتعويض بهما في العلاقة (9) نحصل على حل المسألة ..



شكل ١٦

وفي شكل ١٦ رسم مع المستوى الطوري (x, t) والمستوى (x, u) حيث أعطى الانحراف الابتدائي وامتداده . وفي المستوى الطوري أبرزت الشروط التي يكون فيها الانحراف مختلفاً عن الصفر (انظر شكل ٧) فرسمت مهشرة . وتبين علامات الزائد

والناقص الموجودة في هذه الشروط إشارة (طور) الانحراف (على صورة مثلث متساوي الساقين) .

وبالاستعانة بهذا الرسم من السهل أن نتصور المقطع الجانبي للانحراف في أية لحظة t . فمثلاً في اللحظة $t = 2l/a$ نحصل على انحرافات تنطبق على الانحرافات الابتدائية . وبذلك فالدالة $u(x, t)$ ستكون دالة دورية في المتغير t بفترة دورة $T = 2l/a$ (انظر بند ٣ ، فقرة ٣) .

ندرس الآن مسألة انتشار النظام الحدى . سنبحث عن حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

بالشروط الابتدائية الصفرية

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$$

والشروط الحدية

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu(t), \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad t > 0.$$

ومن نتائج الفقرة ٦ يتبع أنه عند $t < l/a$ يكون الحل هو الدالة

$$u(x, t) = \bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

حيث

$$\bar{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

غير أن هذه الدالة لا تحقق الشرط الحدى

$$u(l, t) = 0 \quad \text{عندما } t > l/a.$$

ندرس الموجة «المنعكسة» المتجهة إلى اليسار والتي لها عند $x = l$ انحراف يساوى

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a}\right) \quad \text{وتعطى صيغتها التحليلية بالعلاقة}$$

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a} - \frac{l-x}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right).$$

ومن السهل التحقق من أن الفرق بين الموجتين

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \bar{\mu}\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right)$$

هو حل المعادلة عند $t < 2l/a$.

وبالاستمرار في هذه العملية نحصل على الحل في صورة متسلسلة

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} - \frac{x}{a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{x}{a}\right), \quad (25)$$

تحتوى (لكل لحظة مثبتة t) على عدد محدود فقط من الحدود المختلفة عن الصفر لأنه مع كل انعكاس جديد ينقص المتغير بمقدار $2l/a$ ، والدالة $\bar{\mu}(t) = 0$ في حالة $t < 0$. ويتم التأكد من تحقق الشروط الحدية مباشرة. بالفعل نضع $x = 0$ ونفصل من المجموع الأول الحد الأول عند $n = 0$ الذى يساوى $\mu(t)$ على انفراد. والحدود الأخرى من المجموع الأول والمجموع الثانى المناظرة لنفس قيم n الواحدة تختصر فيما بينها وهذا يوضح أن $u(0, t) = \mu(t)$.

وبإحلال $n-1$ مكان n وتغيير نهايتى المجموع نتيجة لذلك نحول المجموع الأول إلى الصورة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{2l-x}{a}\right).$$

والآن بوضع $x = l$ ، نتأكد مباشرة من أن حدود المجموع الأول والمجموع الثانى تختصر فيما بينها*.

وبالعلاقة (25) لها معنى فيزيائى بسيط. فالدالة

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

* يتم التحقق من الشروط الابتدائية مباشرة أيضا وذلك لأن متغيرات كل الدوال سالبة عند $t = 0$ والصيغة (25) عند $t = 0$ تكون مساوية للصفر.

هى عبارة عن موجة ناشئة أو مثارة بالنظام الحدى عند $x = 0$ دون الاعتماد على تأثير الطرف $x = l$ كما لو كان الوتر لانهائياً ($0 < x < \infty$). والحدود التالية هى عبارة عن الانعكاسات المتتالية عن الطرف المثبت $x = l$ (المجموع الثانى) وعن الطرف $x = 0$ (المجموع الأول).

وبالمثل تعطى الدالة

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{(2n+1)l}{a} + \frac{x}{a} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{(2n+1)l}{a} - \frac{x}{a} \right)$$

حل المعادلة المتجانسة بالشروط الابتدائية الصفرية $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ والشروط الحدية $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = \mu(t)$. ولن نتوقف عند إثبات وحدانية حل المسألة المعنية والاعتماد المتصل للحل على الشروط الابتدائية والحدية.

فقرة ٨ : نشئت الموجات . إن معادلة ذبذبات الوتر $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ تسمح بحل على صورة موجة جارية $u = f(x \pm at)$ ذات شكل اختيارى . والمعادلة العامة من النمط الزائدى بمعاملات ثابتة

$$\bar{u}_{tt} - a^2 \bar{u}_{xx} + b_1 \bar{u}_t + b_2 \bar{u}_x + \bar{c} \bar{u} = 0 \quad (26)$$

تؤول بواسطة التعويض المذكور فى الباب الأول

$$\bar{\mu} = -0.5 b_1, \lambda = -0.5 b_2/a^2 \text{ حيث } \bar{u} = u e^{\lambda x + \mu t}$$

إلى المعادلة

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + cu = 0, \quad (27)$$

حيث $c = \bar{c} + (b_1/2)^2 - (b_2/2a)^2$. نوضح أن المعادلة (27) لا تسمح بحلول على صورة موجة اختيارية جارية عندما $c \neq 0$. بالفعل بالتعويض فى (27) عن $u = f(x - at)$ نحصل على $a^2 f'' - a^2 f'' + cf = 0$ ومن هنا نظرًا لأن a اختيارية ينتج أن $c = 0$.

والنبضة أو الإشارة من شكل اختيارى يمكن أن تكون هى التحليل فى تكامل

فورييه الممثل في صورة تراكب من الموجات التوافقية على الصورة

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)},$$

حيث ω التردد ، $k = 2\pi/\lambda$ العدد الموجي ، λ طول الموجة .

والسرعة التي يتحرك بها في الفراغ طور الموجة $\alpha = \omega t - kx$ تسمى بالسرعة الطورية للموجة وتساوى كما هو واضح $v = \omega/k$. وإذا كانت السرعة الطورية للموجة التوافقية تعتمد على التردد يقال إن الموجات تشتت . وفي هذه الحالة فإن المركبات التوافقية للإشارة تراخ كل بالنسبة إلى الأخرى فينتج عن ذلك تشوه في المقطع الجانبي للإشارة .

ومن الواضح أنه إذا كانت المعادلة لا تسمح بحلول على صورة موجات من شكل اختياري فإن السرعة الطورية للموجة التوافقية تعتمد على التردد أي يوجد تشتت .

نبين أنه للمعادلة (27) يتحقق التشتت عند $c \neq 0$. بالتعويض في (27) عن $u = e^{i(\omega t - kx)}$ نحصل على معادلة تربط بين ω و k :

$$\omega^2 - a^2 k^2 + c = 0.$$

ومن هنا ينتج أن السرعة الطورية

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + c}} a$$

تعتمد على التردد . وعند الشرط $c = 0$ أي لمعادلة ذبذبات الوتر $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ تكون $v = a$ غير معتمدة على التردد ، وينعدم التشتت . والشرط $c = 0$ يسمى أيضاً بشرط انعدام التشوه أو الاعوجاج (distortion) . وبمثابة مثال ندرس المعادلة التلغرافية (انظر بند ١ ، فقرة ٤)

$$i_{xx} = CLi_H + (CR + LG) i_t + GRI.$$

بفرض $i = ue^{-\mu x}$ حيث $\mu = 0.5(CR + GL)/CL$ نحصل لـ u على المعادلة

$$u_{xx} = CLu_H + \bar{c}u,$$

حيث $\epsilon = -(CR - LG)^2/4CL$. ومن هنا يتضح أنه عندما $CR \neq LG$ تنتشر الإشارة في الكابل بشوه لأنه يوجد تشتت للموجات . والشرط

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \text{ أو } CR = LG$$

يسمى بشرط انعدام التشوه في الخط . وفي هذه الحالة تسمح المعادلة التلغرافية بحل على صورة موجة متضائلة

$$i(x, t) = e^{-\gamma t} f(x - at), \quad \gamma = \frac{R}{L} = \frac{G}{C}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

حيث f دالة اختيارية .

وانعدام تشوه أو اعوجاج الموجات عند انتشارها في الكابل له أهمية بالغة خاصة في الاتصالات التلغرافية والتلفونية على المسافات البعيدة .

فقرة ٩ : المعادلة التكاملية للذبذبات . عند استنباط المعادلة التفاضلية للذبذبات (5) في بند ١ انطلقنا من قانون حفظ كمية الحركة الذي أوصلنا إلى معادلة الذبذبات في الصورة التكاملية (3) . وللاتقال من المعادلة التكاملية إلى المعادلة التفاضلية افترضنا وجود المشتقات الثانية للدالة $u(x, t)$. وكل افراض لتحديد فئة الدوال المدروسة بخاصية ما يعنى الامتناع عن دراسة الدوال التي لا تتميز بالخاصية المفترضة . وبذلك فبالانتقال من المعادلة التكاملية للذبذبات إلى المعادلة التفاضلية استثنينا من مجال دراستنا عمليات الذبذبات التي لا تحقق مطلب القابلية للتفاضل مرتين .

وسنوضح أن كل النظرية يمكن تطويرها في فئة الدوال المتصلة المتقطعة القابلة للتفاضل (continuous piecewise differentiable functions) انطلاقاً من المعادلة التكاملية للذبذبات .

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x_1} \right] \rho d\xi = \\ = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_2} - \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_1} \right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (28)$$

ويمكن إعطاء هذه المعادلة الصورة التالية . ندرس في المستوى (x, t) المنطقة G المحدودة بالمنحنى المتقطع الملوثة (أو السلاسة) (piecewise smooth) C . ونوضح أنه لهذه المنطقة تتحقق العلاقة التكاملية

$$\int_C \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx + k \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_G F dx dt = 0. \quad (29)$$

وللوسط المتجانس تتخذ هذه العلاقة الصورة :

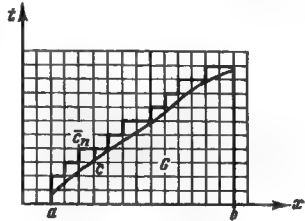
$$\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_0^t \int_a^b f dx dt = 0 \quad \left(f = \frac{F}{\rho} \right). \quad (28')$$

وإذا كان المنحنى C هو عبارة عن محيط مستطيل أضلاعه موازية لمحورى الإحداثيات فإن العلاقة (29) تنطبق على المعادلة (28). وإذا كان المنحنى C يتكون من قطع موازية للمحورين فإن المنطقة G يمكن تصورها كمجموع مستطيلات. وبجميع التكاملات الخطية (على المحيطات) المناظرة لحدود مجموع المستطيلات كل على انفراد نجد أن حدود المجموع المناظرة للحدود الداخلية (المحيطات الداخلية) تختصر فيما بينها. لأن عملية التكامل تتم في اتجاهات متضادة وتغطى الحدود الباقية في المجموع العلاقة (29). نفرض بعد ذلك أن المنحنى C يحتوى الأقواس \bar{C} غير الموازية للمحورين والتي لا تختبر خطوط انفصال للدالة الكاملة. نأخذ شبكة أضلاعها توازى محورى الإحداثيات وندرس خلايا الشبكة المتقاطعة مع المنطقة G . نرسم بالرمز G^* إلى مجمل مثل هذه الخلايا وبالرمز C^* إلى حدود المنطقة G^* . تكون العلاقة (29) صحيحة بالنسبة للمنطقة G^* . وبالاتصال إلى النهاية مع تناقص أبعاد الشبكة ليس من العسير التأكد من صحة العلاقة (29) للمنحنى النهائي C .

بالفعل يتكون الحد الأول من العلاقة (29) في حالة تطبيقها على المنطقة G^* من الحدود على النمط

$$\int_{\bar{C}_n} \Phi(x, t) dt \quad \text{أو} \quad \int_{\bar{C}_n} \Phi(x, t) dx$$

حيث $\Phi(x, t)$ دالة متصلة و \bar{C}_n المحيط (الكنتور) C^* الذى يعتبر تقريباً \bar{C} (approximation) للقوس (شكل ١٧).



شكل ١٧

نفرض أن $t = t_n(x)$ معادلة المنحنى \bar{C}_n و $t = t(x)$ معادلة المنحنى \bar{C} . من الواضح أن $t_n(x)$ تتقارب بانتظام إلى $t(x)$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \Phi[x, t_n(x)] dx = \int_a^b \Phi[x, t(x)] dx,$$

نما يثبت قانونية الانتقال إلى النهاية.

• حيث إن $dx = 0$ على الأجزاء الرأسية للخط المتكسر \bar{C}_n فإن $t = t_n(x)$ في هذه العلاقة تكون هي معادلة الأجزاء الأفقية للمنحنى C_n .

وإذا كان المنحنى C يحتوي أقواساً تعبر خطوط انفصال الدالة الكاملة فإن العلاقة (29) تحتفظ بصحتها إذا أخذنا بمثابة قيم الدالة الكاملة قيمها النهائية من الناحية الداخلية للمنطقة G . وبذلك أثبتنا صحة العلاقة (29).

ندرس المسألة التالية :

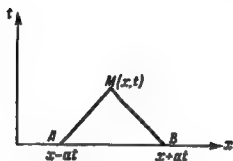
عين الدالة $u(x, t)$ المعرفة والمتقطعة المألوفة في المنطقة $0 \leq t < \infty$, $-\infty < x < \infty$ والتي تحقق المعادلة :

$$\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_G \int f(x, t) dx dt = 0 \quad (29')$$

والشروط الابتدائية

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x),$$



شكل ١٨

حيث $\varphi(x)$ دالة متقطعة المألوفة ، و $f(x, t)$ ، $\psi(x)$ دالتان متقطعتان الاتصال . وهنا C محيط (كتور) مقطع للملوسة اختياري يقع في المنطقة $0 \leq t$. نوضح أن لهذه المسألة حلاً وحيداً يتحدد بعلاقة دالبرت .

نفرض أن الدالة $u(x, t)$ هي حل مسألتنا . ندرس المثلث ABM (شكل ١٨) الملامس للمحور $t \approx 0$ ورأسه في المنطقة $M(x, t)$ وضلعاه يعتبران جزأين من

المميزتين $x - at = \text{const}$, $x + at = \text{const}$ ونطبق عليه العلاقة (29'). على امتداد المستقيم AM تتحقق المتساوية $\frac{dx}{dt} = a$ ومن ثم فإن

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = a \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = a du.$$

على امتداد المستقيم MB تتحقق المتساوية $\frac{dx}{dt} = -a$ ومن ثم فإن

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = -a \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = -a du.$$

وبالتالي فالصيغة الكاملة على امتدادى المميزتين تعبر تفاضلاً تاماً . ويجراء التكامل على امتدادى MA و BM نحصل على :

$$\int_B^M \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) = -a [u(M) - u(B)].$$

$$\int_M^A \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) = a [u(A) - u(M)],$$

ومن ثم تأخذ العلاقة (29) الصورة

$$u(M) = \frac{u(B) + u(A)}{2} + \frac{1}{2a} \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{1}{2a} \iint_{ABM} f dx dt$$

أو

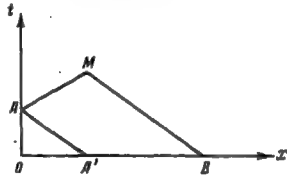
$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (30)$$

وبذلك فإذا وجد حل المسألة المصاغة فإنه يتحدد تحديداً أحادى القيمة بقيمه الابتدائية . وفي حالة المعادلة المتجانسة ($f=0$) تنطبق هذه العلاقة على علاقة دالمبرت . ومن هنا نتج نظرية الوحداية للمسألة محل الدراسة .

وليس من الصعب التحقق بالتعويض المباشر من أن الدالة على النمط

$$u(x, t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) + \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_3(\xi, \tau) d\xi,$$

حيث f_1, f_2 دالتان متقطعتا اللوثة ، f_3 دالة متقطعة الاتصال . تحقق المعادلة (28) ومن ثم المعادلة (29) . وهذا يثبت نظرية الوجود . وحلول المسائل المدروسة في فقرة ٣ بمثابة أمثلة تعتبر دوال متقطعة اللوثة وتشملها النظرية المشروحة .



شكل ١٩

وننتقل الآن إلى المسألة الحدية الأولى على

المستقيم نصف اللانهائى . سنبحث عن حل

المعادلة (29) في نقطة ما $M(x, t)$ حالة $x/a > t$ (شكل ١٩) لأنه في المنطقة $x/a < t$ (تحت الميزة $x=at$) لا يحدث تأثير الشروط الحدية ويحدد الحل بالعلاقة (30) . نطبق العلاقة (29) على الشكل الرياى $MAA'B$ الذى فيه AA' , MB , MA أجزاء من الميزات . وباجراء التكامل على امتداد الميزات MA , AA' , BM نحصل على :

$$2au(M) = 2au(A) + au(B) - au(A') + \int_{A'}^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \iint_{MAA'B} f dx dt.$$

وبالتعويض هنا عن إحداثيات النقط M, A, B, A' منحصل على :

$$u(x, t) = u\left(0, t - \frac{x}{a}\right) + \frac{u(x+at, 0) - u(at-x, 0)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} dx + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi,$$

أو

$$u(x, t) = u\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \quad \left(t > \frac{x}{a}\right). \quad (31)$$

ومن (31) نتج مباشرة وحدانية حل المسألة محل الدراسة.

وعندما $f = 0$ تنطبق هذه العلاقة ، كما يسهل ملاحظة ذلك ، على العلاقة (24) بند ٧ ، ٢ ، ٦ .
وتدرس بطريقة مماثلة المسألة الحدية الثانية أيضاً وكذلك المسائل للمستقيم المحدود .

وعند دراسة المسألة الحدية الأولى رأينا أن إعطاء الشرطين الابتدائيين

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

وشرط حدى واحد

$$u(0, t) = \mu(t)$$

يكفى للتعين التام للحل . ومن هنا يتبع أنه يجب أن توجد علاقة تربط بين الدوال φ, ψ, μ, ν حيث $\nu(t) = u_x(0, t)$ بتفاضل العلاقة (31) بالنسبة إلى x ووضع $x = 0$ نحصل على :

$$\nu(t) = \frac{1}{a} \{ \psi(at) - [\mu'(t) - a\varphi'(at)] \}, \quad (32)$$

حيث وضعنا للبساطة $f = 0$. وبالإستعانة بالعلاقة (32) يمكن مثلاً أن نجعل المسألة الحدية الثالثة تؤول إلى المسألة الحدية الأولى .

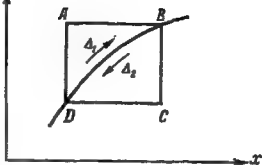
فقرة ١٠ : انتشار الانفصالات على امتداد الميزات . نتقل إلى دراسة انفصالات مشتقات حلول المعادلة (29) . وسنبين أن خطوط انفصال مشتقى الدالة $u(x, t)$ اللتين تحققتان المعادلة (29) يمكن أن تكون فقط هي خطوط عائلات الميزات

$$x - at = \text{const}, \quad x + at = \text{const}.$$

بالفعل . نقرض أن متحنى ما قابلاً للتفاضل معرفاً بالمعادلة

$$x = x(t),$$

هو خط انفصال مشطقي الدالة المتصلة المتقطعة القابلة للتفاضل $u(x, t)$. نقرض لتحديد أن دالة $x(t)$ متزايدة . نطبق العلاقة (29) على المستطيل $ABCD$ (شكل ٢٠) :



شكل ٢٠

$$\int_{BA+AD} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_{DC+CB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) = 0,$$

وكذلك على المثلثين المنحنيين $\Delta_1 = BAD$, $\Delta_2 = BDC$:

$$\int_{BA+AD} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_{DB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 dt = 0,$$

$$\int_{DC+CB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) - \int_{DB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 dt = 0,$$

حيث الأقواس $_{1,2}$ () توضح أنه يجب أخذ القيم النهائية من داخل المثلثين Δ_1 أو Δ_2 . وبطرح المتساوية السابقة من مجموع المتساويتين الأخيرتين نحصل على :

$$\int_{DB} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 \right\} dt = 0$$

أو وفقًا لصغر القوس DB صغرًا اختياريًا

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] x' + a^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0, \quad (33)$$

حيث نرسم كالمعادلة لقيمة انفصال الدالة بالقوسين :

$$[f] = f_2 - f_1.$$

نأخذ المشتقة بالنسبة إلى t لقيمة الدالة $u(x, t)$ على امتداد خط انفصال المشتقات :

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i x + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i \quad (i = 1, 2),$$

علمًا بأنه بمثابة قيمة المشتقات يمكن أن نأخذ القيم النهائية سواء من Δ_1 أو من Δ_2 . والفرق بين الطرفين الأيمنين عند $l = 2 - l = 1$ يعطى :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] + x' \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0.$$

وبمقارنة هذه المتساوية بالمتساوية (33) وافترض أن أحد الانفصالين $\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]$ ، $\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]$ على الأقل لا يساوى الصفر نرى أن هاتين المتساويتين يمكن أن تتحققا في آن واحد إذا كان عدد هذه المجموعة مساويًا للصفر :

$$\left| \begin{array}{cc} x' & a^2 \\ 1 & x' \end{array} \right| = (x')^2 - a^2 = 0$$

أو

$$x = \pm at + \text{const.}$$

وبذلك فإن خطوط انفصال مشتق حل معادلة الذبذبات هي المميزات .

مسائل :

١- ارسم المقطع الجانبي للوتر في لحظات مختلفة في الحالات التالية :

أ. الوتر اللانهائى ($-\infty < x < \infty$) .

(أ) السرعة الابتدائية تساوى صفراً

(ب) $\psi(x) = 0$ والمقطع الجانبي الابتدائي

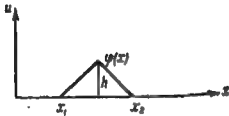
معطى على الصورة المبينة بشكل ٢١ .

(ب) الانحراف الابتدائي يساوى الصفر

والسرعة الابتدائية لها قيمة ثابتة

$\psi_0 = u(x, 0)$ على جزء الوتر (x_1, x_2)

ومساوية للصفر خارج هذا الجزء .



شكل ٢١

(ج) الشروط الابتدائية على الصورة التالية :

$$\psi(x) = 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{عند } (x < c) \\ \frac{h}{2c^2} x(2c - x) & \text{عند } (c < x < 2c) \\ 0 & \text{عند } (x > 2c) \end{cases}$$

II. الوتر نصف اللانهائى ($0 \leq x < \infty$) .

(د) السرعة الابتدائية تساوى صفراً $\psi(x) = 0$ والانحراف الابتدائي معطى في صورة المثلث المبين

بشكل ٢١ . طرف الوتر مثبت .

(هـ) نفس المسألة للوتر ذى الطرف الحر $x = 0$.

(و) الشروط الابتدائية على الصورة

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < c \text{ عند}) \\ \psi_0 = \text{const} & (c < x < 2c \text{ عند}) \\ 0 & (x > 2c \text{ عند}) \end{cases}$$

طرف الوتر $x = 0$ مثبت.

(ز) نفس المسألة للوتر ذى الطرف الحر $x = 0$. يبين رسم المقطع الجانبي لجميع المسائل (أ) - (ز) في اللقطات الزمنية

$$t_0 = 0, \quad t_k = \frac{a}{8a} k \quad (k = 1, 2, \dots, 8).$$

بين للمسائل (أ) - (ز) على المستوى الطورى (x, t) المناطق المناظرة للمراحل المختلفة للعملية.

٢- عين حل المسألة ١ (أ) لجميع قيم المتغيرين x, t (العلاقات التى تعبر عن الدالة $u(x, t)$ مختلفة لمناطق المستوى الطورى المختلفة).

٣- عين الانحراف فى نقطة ما t_0 بواسطة بالاستعانة بالمستوى الطورى (x, t) والمستوى (x, u) الذى (شكل ٢١) معطاة فيه الانحرافات الابتدائية ($\psi = 0$) سواء لحالة الوتر اللانهائى أو لحالة الوتر نصف اللانهائى ذى الطرف المثبت (أو الحر).

٤- فى بداية أنبوية أسطوانية طويلة مملوءة بغاز يوجد كباس يتحرك وفقاً لقانون اختياري $x = f(t)$ بسرعة $v = f'(t) < a$. الإزاحة الابتدائية والسرعة الابتدائية لجسيمات الغاز تساويان الصفر. عين إزاحة الغاز فى المقطع ذى الإحداثى الألفى x . ادرس حالة حركة الكباس بسرعة ثابتة $a < c$. ماذا يمكن قوله عن حل للمسألة إذا كانت سرعة الكباس $a > c$ ابتداء من لحظة معينة ؟ (انظر الملحق ٥ ، للباب الثانى).

٥- نفرض أن فى وتر لانهائى نجرى الموجة $u(x, t) = f(x - at)$. اعتبر حالة الوتر فى اللحظة $t = 0$ هى الحالة الابتدائية وحل معادلة الموجة بالشروط الابتدائية المناظرة. قارن مع المسألة ١ (أ).

٦- قضيب لانهائى مرن ناتج باتصال قضيبين عند $x = 0$ بالمميزات

$$k_1, \quad \rho_1, \quad a_1 = \sqrt{k_1/\rho_1} \quad (x < 0 \text{ عند})$$

$$k_2, \quad \rho_2, \quad a_2 = \sqrt{k_2/\rho_2} \quad (x > 0 \text{ عند})$$

(أ) نفرض أنه من المنطقة $x < 0$ نجرى الموجة

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

حيث f دالة معطاة. عين معامل الانعكاس والانكسار للموجة عند مرورها بنقطة الالتصاق ($x = 0$). بين عند أية شروط تنعكس الموجة المنعكسة.

(ب) حل المسألة المماثلة إذا أعطى الانحراف الابتدائي المحل

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & (x < x_1 \text{ عند}) \\ \varphi(x) & (x_1 < x < x_2 < 0 \text{ عند}) \\ 0 & (x > x_2 \text{ عند}) \end{cases}$$

وكانت السرعة الابتدائية تساوى الصفر.

٧- نفرض أنه في نقطة ما $x = x_0$ على الوتر معلق ثقل كتلته M . ومن المنطقة $x < 0$ تجرى الموجة

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

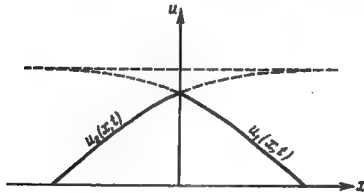
عين الموجة المنكسرة والموجة المنعكسة.

٨- أنبوية نصف لانهاية ($x > 0$) مملوءة بغاز مثالي يوجد على طرفها $x = 0$ كباس كتلته M يتحرك بحرية. وفي اللحظة الزمنية $t = 0$ يكسب الكباس بواسطة صدمة سرعة ابتدائية v_0 . عين عملية انتشار الموجة في الغاز إذا علم أن السرعة الابتدائية والانحراف الابتدائي لجسيمات الغاز يساويان الصفر.

إرشاد: ادرس حل معادلة التذبذبات في المنطقة $x > 0$. استعن بالشروط الحدى

$$Mu_H(0, t) = Svp_0u_x(0, t)$$

(p_0 الضغط الابتدائي للغاز، S مساحة المقطع العرضي للأنبوية، $v = \frac{c_p}{c_v}$) والشروط الابتدائية على الحدود $u(0, 0) = 0, u_x(0, 0) = v_0$



شكل ٢٧

٩- وتر لا نهائى ذو كتلة مركزة M عند $x = 0$ موجود في وضع الاتزان. وفي اللحظة الابتدائية $t = 0$ تكسب الكتلة M بصلمة سرعة ابتدائية v_0 . أثبت أنه في اللحظة الزمنية $t > 0$ يكون اضطراب الوتر على الصورة الميعة. بشكل ٢٧ حيث $u_1(x, t)$ ، $u_2(x, t)$ معرفتان بالعلاقين

$$u_1(x, t) = \begin{cases} \frac{Mav_0}{2T} \left[1 - e^{-\frac{2T}{Mc^2}(x-at)} \right] & (x-at < 0 \text{ عند مباشرة}) \\ 0 & (x-at > 0 \text{ عند}) \end{cases}$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \frac{Mav_0}{2T} \left[1 - e^{-\frac{2T}{Mc^2}(x+at)} \right] & (x+at < 0 \text{ عند مرتدة}) \\ 0 & (x+at > 0 \text{ عند}) \end{cases}$$

إرشاد : استعن بالشروط

$$M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(0, t) = M \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(0, t) = T \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = T \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t).$$

١٠- حل مسألة انتشار الذبذبات الكهربائية في سلك لانهاى بالشروط

$$\frac{Q}{C} = \frac{R}{L}$$

وبشروط ابتدائية اختيارية .

١١- عين حل المعادلة التكاملية للذبذبات للوتر نصف اللانهاى بشروط حدية من النوع الثالث (انظر

فقرة ٩) .

١٢- في الطرف $x=0$ لقصيب نصف لانهاى ثبت غشاء يحدث مقاومة للذبذبات الطولية للقصيب

تناسب مع السرعة $u_2(0, t)$. عين عملية الذبذبة إذا أعطى الانحراف الابتدائى و $u_2(x, 0) = \psi(x) = 0$.

بند ٣ - طريقة فصل المتغيرات

فقرة ١ : معادلة الذبذبات الحرة للوتر . إن طريقة فصل المتغيرات أو طريقة فورييه تعتبر واحدة من أكثر الطرق شيوعًا وانتشارًا لحل المعادلات التفاضلية الجزئية . وسنشرح هذه الطريقة لمسألة تذبذبات الوتر المثبت من طرفيه . وحل المسألة المذكورة سندرسه بتفصيل تام وعند الشرح التالى للمنهج سوف نعلم على هذا البند ونشير إليه دون أن نكرر الإثباتات .

وهكذا سنبحث عن حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (1)$$

الذى يحقق الشروط الحدية المتجانسة

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (2)$$

والشروط الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

المعادلة (1) خطية ومتجانسة ولذا فإن مجموع الحلول الخاصة يعتبر أيضاً حلاً لهذه المعادلة. وبالحصول على عدد كبير بقدر كاف من الحلول الخاصة يمكن محاولة تعيين الحل المطلوب بتجميعها بمعاملات معينة.

نصيغ المسألة المساعدة الأساسية .

عين حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

الذى لا يساوى الصفر بالتطابق والذى يحقق الشروط الحدية المتجانسة

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

والقابل للتعبير عنه في صورة حاصل الضرب

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (5)$$

حيث $X(x)$ دالة في المتغير x فقط ، $T(t)$ دالة في المتغير t فقط .

بالتعويض بالصورة المقترحة للحل (5) في المعادلة (1) نحصل على :

$$X''T = \frac{1}{a^2} T''X$$

أو بعد القسمة على XT

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (6)$$

ولكي تكون الدالة (5) حلاً للمعادلة (1) يجب أن تتحقق المتساوية (6) بالتطابق ، أى تتحقق لجميع قيم المتغيرين المستقلين $0 < x < l, t > 0$. والطرف الأيمن للمتساوية (6) هو دالة فقط في المتغير t والطرف الأيمن دالة فقط في المتغير x . فثلاً بثبت x عند قيمة معينة وتغير t (أو بالعكس) نجد أن

الطرفين الأيمن والأيسر للمتساوية (6) يحتفظان عند تغيير متغيريهما بقيمة ثابتة

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \quad (7)$$

حيث λ ثابت نأخذه لسهولة الاستنتاجات والتحليلات التالية بعد ذلك بإشارة سالبة دون أن نفترض شيئاً عند ذلك عن إشارته .

ومن العلاقة (7) نحصل على معادلتين تفاضليتين عاديتين لتعيين $X(x)$ ، $T(t)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0, \quad (8)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0. \quad (9)$$

والشروط الحدية (4) تعطى

$$u(0, t) = X(0) T(t) = 0,$$

$$u(l, t) = X(l) T(t) = 0.$$

ومن هنا ينتج أن الدالة $X(x)$ يجب أن تحقق الشرطين الإضافيين

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (10)$$

وإلا فقد كنا سنحصل على

$$T(t) = 0, \quad u(x, t) = 0,$$

في حين أن المسألة تنحصر في تعيين الحل غير التافه (غير الصفري) . ولا توجد أية شروط إضافية على الدالة $T(t)$ في المسألة المساعدة الأساسية .

وبذلك فنتيجة لتعيين الدالة $X(x)$ نصل إلى مسألة بسيطة هي مسألة القيم الذاتية (proper values) :

عين قيم البارامتر λ التي يوجد عندها حل غير تافه للمسألة :

$$\left. \begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ X(0) &= X(l) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

وكذلك عين هذه الحلول . وهذه القيم للبارامتر λ تسمى بالقيم الذاتية، والحلول غير

التافهة المناظرة لهذه القيم تسمى بالدوال الذاتية للمسألة (11) . والمسألة المصاغة بهذه الطريقة تسمى عادة بمسألة شتورم - ليوفيل .

ندرس على انفراد الحالات التي يكون فيها البارامتر λ سالبًا أو مساويًا للصفر أو موجبًا .

١ - عندما $\lambda < 0$ لا يوجد للمسألة حلول غير تافهة . بالفعل يكون الحل العام للمعادلة (8) على الصورة :

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

وتعطي الشروط الحدية :

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0;$$

$$X(l) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \quad (\alpha = l\sqrt{-\lambda}),$$

أى أن

$$C_1 = -C_2, \quad C_1(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0.$$

ولكن α في هذه الحالة التي ندرسها عدد حقيقى موجب ومن ثم فإن $e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$ ولذا فإن

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

وبالتالى

$$X(x) = 0.$$

٢ - عندما $\lambda = 0$ أيضًا لا توجد حلول غير تافهة . وبالفعل ، في هذه الحالة يكون الحل العام للمعادلة (8) على الصورة

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

وتعطي الشروط الحدية :

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 l = 0,$$

أى أن $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ وبالتالى

$$X(x) = 0.$$

٣- عندما $\lambda > 0$ يمكن كتابة الحل العام للمعادلة في الصورة :

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

والشروط الحدية تعطى :

$$X(0) = D_1 = 0,$$

$$X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

وإذا كانت $X(x)$ لا تساوى الصفر بالتطابق فإن $D_2 \neq 0$ ولذا فإن

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0 \quad (12)$$

أو

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

حيث n أى عدد صحيح . وبالتالي فالحلول غير التافهة للمسألة (11) ممكنة الوجود فقط عند القيم

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2.$$

وهذه القيم الذاتية تناظرها الدوال الذاتية

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

حيث D_n ثابت اختياري .

وهكذا فقط عند قيم λ المساوية

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad (13)$$

توجد حلول غير تافهة (غير صفرية بالتطابق) للمسألة (11)

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (14)$$

محددة بدقة حتى معامل اختياري وضعناه يساوى الواحد الصحيح (في العلاقة

(14) . وهذه القيم λ_n تناظرها حلول للمعادلة (9) على الصورة :

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at, \quad (15)$$

حيث A_n, B_n ثوابت اختيارية .

وبالانتقال إلى المسائل (3) — (1) نستنتج أن الدوال

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (16)$$

تعتبر حلولاً خاصة للمعادلة (1) تحقق الشروط الحدية (4) وقابلة للتمثيل في صورة حاصل الضرب (5) لدالتين إحداها دالة تعتمد فقط على x والأخرى تعتمد فقط على t . وهذه الحلول يمكن أن تحقق الشروط الابتدائية (3) لمسألتنا الأصلية فقط لحالات خاصة للدالتين $\varphi(x), \psi(x)$.

ننتقل إلى حل المسألة (3) — (1) في الحالة العامة . وفقاً لحظية وتجانس المعادلة (1) فإن مجموع الحلول الخاصة

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (17)$$

يحقق أيضاً هذه المعادلة والشروط الحدية (2) . وستوقف عند هذا الموضوع فيما بعد (انظر الفقرة ٣ من هذا البند) . والشروط الابتدائية تكفل تعيين A_n و B_n . وستطلب أن تحقق الدالة (17) الشروط (3) :

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) = \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \\ u_t(x, 0) = \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ومن نظرية متسلسلات فورييه نعلم أن الدالة الاختيارية $f(x)$ متقطعة الاتصال ومتقطعة القابلية للتفاضل المعروفة في الفترة المغلقة $0 \leq x \leq l$ تحل في متسلسلة فورييه

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (19)$$

حيث

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (20)$$

إذا كانت الدالتان $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ تحققان شروط التحليل في متسلسلة فورييه فإن :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (21)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (22)$$

وتبين مقارنة هاتين المتسلسلتين بالعلاقة (18) أنه لتحقق الشروط الابتدائية يجب وضع

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n, \quad (23)$$

• عادة تدرس الدوال الدورية ذات فترة الدورة $2l$:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right),$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} F(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

وإذا كانت الدالة $F(x)$ دالة فردية فإن $a_n = 0$ ومن ثم فإن

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

وإذا كانت الدالة $F(x)$ معرفة فقط في الفترة $(0, l)$ فإنه يمكن امتدادها فرديا وتكوين التحليل في الفترة من $-l$ إلى $+l$ مما يؤدي بنا إلى العلاقتين (19) و (20) (انظر كتاب سيسكونوف « التفاضل والتكامل » الجزء الثاني باللغة العربية طبعة دار « مير »).

مما يحدد تمامًا الدالة (17) التي تعطى حل المسألة المدروسة .

لقد عينا الحل في صورة متسلسلة لانهاية (17) . وإذا كانت المتسلسلة (17) تتباعد أو الدالة المعروفة بهذه المتسلسلة ليست قابلة للتفاضل فإن هذه المتسلسلة بالطبع لا يمكن أن تعتبر حلاً لمعادلتنا التفاضلية .

وفي هذه الفقرة نكتفي بالتكوين الشكلي (الصوري) للحل . أما توضيح الشروط التي بتحققها تتقارب المتسلسلة (17) وتعتبر حلاً للمعادلة فنسورده في الفقرة ٣ .

فقرة ٢ : تفسير الحل . ننتقل الآن إلى تفسير الحل الناتج . الدالة $u_n(x, t)$ يمكن التعبير عنها في الصورة :

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ = a_n \cos \frac{\pi n}{l} a (t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (24)$$

حيث °

$$a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \frac{\pi n}{l} a \delta_n = -\arctan \frac{B_n}{A_n}. \quad (25)$$

وكل نقطة على الوتر x_0 تتذبذب ذبذبات توافقية

$$u_n(x_0, t) = a_n \cos \frac{\pi n}{l} a (t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x_0$$

بالسعة

$$a_n \sin \frac{\pi n}{l} x_0.$$

وتسمى حركة الوتر على هذا النمط بالموجة المستقرة (أو الراهنة (stationary wave)). والنقط $x = m \frac{l}{n} (m = 1, 2, \dots, n-1)$ التي يكون فيها $\sin \frac{\pi n}{l} x = 0$ تظل خلال كل العملية ثابتة وتسمى بعقد الموجة المستقرة $u_n(x, t)$. والنقط $x = \frac{2m+1}{2n} l (m = 0, 1, \dots, n-1)$ التي يكون فيها

$$\arctan \frac{B_n}{A_n} \text{ يرمز لها في بعض المراجع بالرمز } \tan^{-1} \frac{B_n}{A_n} \text{ (ملاحظة للترجم).}$$

الموجة المستقرة . $\sin \frac{\pi n}{l} x = \pm 1$ تتذبذب بأكبر سرعة a_n وتسمى بيطون (antinodes) الموجة

والمقطع الجانبي للموجة المستقرة في أية لحظة زمنية يكون عبارة عن منحني جيبي (سينوسويد)

$$u_n(x, t) = C_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

حيث

$$C_n(t) = a_n \cos \omega_n(t + \delta_n) \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right).$$

وفي اللحظات الزمنية t التي عندها يكون $\cos \omega_n(t + \delta_n) = \pm 1$ تصل الانحرافات إلى قيمتها العظمى وسرعة الحركة تكون مساوية للصفر . وفي اللحظات الزمنية t التي عندها $\cos \omega_n(t + \delta_n) = 0$ يكون الانحراف مساوياً للصفر وسرعة الحركة تصل إلى قيمتها العظمى . وترددات ذبذبات كل نقط الوتر متساوية وتساوى

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} a. \quad (26)$$

والترددات ω_n تسمى بالترددات الذاتية لذبذبات الوتر . وللذبذبات المستعرضة للوتر $a^2 = T/\rho$ وبالتالي فإن

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (27)$$

وطاقة الموجة المستقرة الـ n (التوافقية الـ n) لحالة الذبذبات المستعرضة للوتر تساوى :

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \\ &= \frac{a_n^2}{2} \int_0^l \left[\rho \omega_n^2 \sin^2 \omega_n(t + \delta_n) \sin^2 \frac{\pi n}{l} x + \right. \\ &\quad \left. + T \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \cos^2 \omega_n(t + \delta_n) \cos^2 \frac{\pi n}{l} x \right] dx = \\ &= \frac{a_n^2}{2} \int_0^l \left[\rho \omega_n^2 \sin^2 \omega_n(t + \delta_n) + T \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \cos^2 \omega_n(t + \delta_n) \right] dx. \quad (28) \end{aligned}$$

وذلك لأن

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi n}{l} x dx = \int_0^l \cos^2 \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{l}{2}.$$

وبالاستعانة بصيغتي α_n , ω_n وكذلك بالمتساوية $T = a^2 \rho$ نحصل على :

$$E_n = -\frac{\rho \alpha_n^2 \omega_n^2}{4} l = \omega_n^2 M \cdot \frac{A_n^2 + B_n^2}{4}, \quad (29)$$

حيث $M = lp$ كتلة الوتر .

ونشعر نحن عادة بذبذبات الوتر من الصوت الصادر عن الوتر . ودون أن نتوقف عند عملية انتشار الذبذبات في الهواء والشعور بالذبذبات الصوتية في أذنا يمكن القول بأن صوت الوتر هو عبارة عن تراكب «النغمات البسيطة» المناظرة للموجات المستقرة التي تحلل إليها الذبذبات . وهذا التحليل للصوت إلى نغمات بسيطة لا يعتبر عملية ذات طابع رياضي فقط . فيمكن إبراز وفصل النغمات البسيطة في التجارب العملية بواسطة جهاز المرنان (resonator) .

ويعتمد ارتفاع النغمة على تردد الذبذبات المناظرة لهذه النغمة . وتحدد قوة النغمة بطاقتها وبالتالي بسعتها . وأكثر النغمات انخفاضاً التي يمكن أن تصدر عن الوتر تتحدد بأكثر الترددات الذاتية انخفاضاً $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ وتسمى بالنغمة الأساسية للوتر . والنغمات الأخرى المناظرة للترددات مضاعفات ω_1 تسمى بالنغمات المتوافقة (overtons) . ويعتمد جرس الصوت (timbre) على وجود النغمات المتوافقة بالإضافة إلى النغمة الأساسية وعلى توزيع الطاقة على التوافقيات . وتعتمد النغمة الأكثر انخفاضاً للوتر وجرسها على طريقة إثارة الذبذبات . بالفعل فطريقة إثارة الذبذبات تحدد الشروط الابتدائية :

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (3)$$

التي يتم التعبير بدالاتها عن المعاملات A_n , B_n . وإذا كان $A_1 = B_1 = 0$ فإن النغمة الأكثر انخفاضاً ستكون هي النغمة المناظرة للتردد ω_n حيث n هو أصغر عدد يكون عنده A_n أو B_n مختلفاً عن الصفر .

وعادة يصدر الوتر نفس النغمة الواحدة . بالفعل نحدث في الوتر ذبذبة بشده إلى ناحية وتركه بلا سرعة ابتدائية . وفي هذه الحالة يكون

$$u_t(x, 0)=0, \quad u(x, 0)=\varphi(x) > 0$$

و

$$A_1 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi}{l} \xi \, d\xi > 0,$$

وذلك لأن

$$\sin \frac{\pi}{l} \xi > 0.$$

والمعاملات التالية تكون بوجه عام أصغر كثيراً من A_1 لأن الدالة $\sin \frac{n\pi}{l} \xi$ تكون متعاقبة الإشارة عندما $n \geq 2$. وكحالة خاصة إذا كانت $\varphi(x)$ متائلة بالنسبة إلى منتصف الفترة فإن $A_2 = 0$. وبذلك فإذا أحدثنا في الوتر ذبذبات بشده إلى ناحية ما ($\varphi(x) > 0$) فإن النغمة الأكثر انخفاضاً ستكون هي النغمة الأساسية للوتر التي طاقتها بوجه عام تكون أكبر من طاقة التوافقيات الأخرى .

ويمكن إحداث ذبذبات في الوتر بطرق أخرى أيضاً . فعلى سبيل المثال إذا كانت الدالة الابتدائية فردية بالنسبة إلى منتصف الوتر فإن

$$A_1 = 0$$

وتناظر النغمة الأكثر انخفاضاً التردد التالى :

$$\omega = \omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} .$$

وإذا لمسنا الوتر المصدر للصوت عند منتصفه بالضبط فإن صوته يتغير بمحدة وتصدر جواباً (octave) على نغمتها . وهذه الطريقة لتغيير النغمة تستخدم كثيراً عند العزف على الكمان والقيثارة (الجيتار) والآلات الوترية الأخرى وتسمى الفلاجيوليت (flageolet) . وهذه الظاهرة واضحة تماماً من وجهة نظر نظرية ذبذبة الوتر ، ففي لحظة لمس منتصف الوتر نلغى الموجات المستقرة التي يكون لها في هذه النقطة بطون ونحفظ فقط بالتوافقيات التي لها في هذه النقطة عقد . وبذلك

تظل باقية التوافقيات الزوجية فقط . ويكون التردد الأكثر انخفاضاً هو

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} .$$

وإذا لمسنا الوتر عند نقطة تبعد عن طرفه بمسافة ثلث طوله فإن ارتفاع (علو) النغمة الأساسية يعلو ثلاث مرات لأنه عند ذلك تظل باقية تلك التوافقيات فقط التي لها عقد عند النقطة $x = l/3$.

والعلاقان

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} , \quad v_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l \sqrt{\frac{\rho}{T}} , \quad (30)$$

الثان تحدان على الترتيب التردد وفترة الدورة للذبذبة الأساسية تفسران القوانين التالية للذبذبة الوتر التي اكتشفت في البداية بالتجارب العملية (قوانين ميرسين) :

١ - للأوتار المتشابهة في الكثافة والمشدودة بطريقة واحدة تتناسب فترة دورة ذبذبة الوتر مع طوله .

٢ - تتغير فترة الدورة عند الطول المعطى للوتر (عند ثبات الطول) متناسبة عكسياً مع الجذر التربيعي للشد .

٣ - عند الطول والشد المعطيين (عند ثبات الطول والشد) تتناسب فترة الدورة مع الجذر التربيعي للكثافة الخطية للوتر .

وهذه القواعد يمكن توضيحها عملياً بسهولة على الجهاز الوحيد الوتر .

وفي هذه الفقرة درسنا الموجات المستقرة الناشئة عند ذبذبة الوتر المثبت الطرفين . ومسألة وجود حل على الصورة

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

تكافئ مسألة وجود الموجات المستقرة لأن المقاطع الجانبية لهذا الحل في اللحظات الزمنية المختلفة تكون متناسبة .

فقرة ٣ : التعبير عن الذبذبات الاختيارية في صورة تراكب من الموجات المستقرة . في فقرة ١ درسنا مسألة الذبذبات الحرة للوتر المثبت الطرفين وأثبتنا وجود

حلول خاصة في صورة موجات مستقرة . وفي نفس الفقرة أعطينا صيغة شكلية لتمثيل الذبذبة الاختيارية في صورة مجموع لانهاى من الموجات المستقرة . وفي هذه الفقرة يعطى التبرير لإمكانية تمثيل الحل الاختيارى في صورة تراكب موجات مستقرة . وفي الدرجة الأولى ندرس تعميم مبدأ التراكب المعروف جيدًا للمجاميع النهائية على حالة المتسلسلات اللانهائية .

نفرض أن $L(u)$ مؤثر تفاضلى خطى بحيث إن $L(u)$ يكون مساويًا لمجموع بعض مشتقات الدالة (العادية أو الجزئية) بمعاملات هي عبارة عن دوال في المتغيرات المستقلة .

نثبت المأخوذة التالية (المبدأ المعمم للتراكب) :

إذا كانت الدوال u_i ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) حلولاً خاصة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة $L(u) = 0$ (التفاضلية العادية أو التفاضلية الجزئية) فإن المتسلسلة $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ تكون أيضًا حلًا لهذه المعادلة إذا أمكن حساب مشتقات u الموجودة في المعادلة $L(u) = 0$ بواسطة عملية تفاضل المتسلسلة حدًا حدًا .

بالفعل إذا كانت مشتقات u الموجودة في المعادلة $L(u) = 0$ يمكن حسابها بالتفاضل حدًا حدًا للمتسلسلة فإننا نحصل وفقًا لخطية المعادلة على :

$$L(u) = L\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i) = 0,$$

وذلك لأنه يمكن جمع المتسلسلات المتقاربة حدًا حدًا . وبذلك أثبتنا أن الدالة u تحقق المعادلة . وبمثابة الشرط الكافى لإمكانية التفاضل حدًا حدًا للمتسلسلة سنستعين باستمرار بشرط التقارب المنتظم للمتسلسلة

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i), \quad (31)$$

الناجمة بعد عملية التفاضل * .

* انظر كتاب يسكونوف «التفاضل والتكامل» طبعة دار «مير» باللغة العربية .

ونعود الآن إلى مسألتنا الحدية . قبل أى شيء علينا التأكد من اتصال الدالة :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (32)$$

ومن اتصال هذه الدالة سيستج أن $u(x, t)$ تتقارب بالاتصال إلى قيمها الابتدائية والحدية . ولهذا الغرض يكفي إثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة المعبرة عن الدالة $u(x, t)$ وذلك لأن الحد العام لهذه المتسلسلة هو دالة متصلة ، والمتسلسلة المتقاربة بانتظام - التى حدودها دوال متصلة - نعرف دالة متصلة . بالاستعانة بالمتباينة :

$$|u_n(x, t)| \leq |A_n| + |B_n|,$$

نستنتج أن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) \quad (33)$$

تعتبر هى المتسلسلة الحد الأعظم (majorant) للمتسلسلة (32) . وإذا كانت المتسلسلة الحد الأعظم (33) تتقارب فإن المتسلسلة (32) تتقارب بانتظام أى تكون الدالة $u(x, t)$ متصلة .

وللتأكد من أن $u_t(x, t)$ تتقارب بانتظام إلى قيمها الابتدائية يجب إثبات اتصال هذه الدالة ولهذا يكفي إثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة

$$u_t(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} a \frac{\pi n}{l} \left(-A_n \sin \frac{\pi n}{l} at + B_n \cos \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (34)$$

أو تقارب المتسلسلة الحد الأعظم

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n (|A_n| + |B_n|). \quad (35)$$

وأخيرًا للتأكد من أن الدالة $u(x, t)$ تحقق المعادلة أى أن المبدأ المعمم للتراكب يكون قابلاً للتطبيق' يكفي إثبات إمكانية إجراء عملية التفاضل مرتين للمتسلسلة المعبرة عن $u(x, t)$ حدًا حدًا ولهذا الغرض يكفي بدوره إثبات التقارب المنتظم للمتسلسلتين :

$$u_{xx} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_{tt} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

التي تناظرهما بدقة أقصاها معامل التناسب المتسلسلة الحد الأعظم المشتركة لها :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|A_n| + |B_n|). \quad (36)$$

وبما أن

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi a} \psi_n,$$

حيث

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx,$$

فإن مسألتنا تحول إلى إثبات تقارب المتسلسلات

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \quad (k=0, 1, 2), \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k=-1, 0, 1). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ولهذا الغرض نستعين بالخواص المعروفة لمتسلسلات فورييه.

إذا كانت للدالة الدورية $F(x)$ بفترة دورة $2l$ مشتقات متصلة عددها k والمشتقة الـ $(k+1)$ لها متقطعة الاتصال فإن المتسلسلة العددية

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|), \quad (38)$$

حيث a_n و b_n معاملات فورييه ، تكون متسلسلة مقاربة . وإذا كنا نتحدث عن التحليل في متسلسلة للدالة $f(x)$ بـ $\sin \frac{\pi n}{l} x$ حيث الدالة $f(x)$ معطاة فقط في الفترة $(0, l)$ فإنه يجب أن تكون المطالب السابقة متحققة للدالة $F(x)$ الناتجة بالاستكمال الفردي للدالة $f(x)$. ويوجه خاص فلاتصال الدالة $F(x)$ يجب أن

يكون $f(0)=0$ وإلا فإنه يتج بالاستكمال الفردي انفصال عند النقطة $x=0$. وبالمثل في النقطة $x=l$ يجب أن تكون $f(l)=0$ لأن الدالة المستكاملة متصلة ودورية بفترة دورة $2l$. ويتج اتصال المشتقة الأولى عند $x=0, x=l$ مباشرة عند الاستكمال الفردي. وبوجه عام فلاتصال المشتقات من رتب زوجية للدالة المستكاملة يجب أن تحقق المطالب

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(l)=0 \quad (k=0, 2, 4, \dots, 2n). \quad (39)$$

ويتحقق اتصال المشتقات من رتب فردية بدون أية مطالب إضافية.

وهكذا فلتقارب المتسلسلات

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \quad (k=0, 1, 2)$$

يكفى أن نطلب أن يحقق الانحراف الابتدائي $\varphi(x)$ المطالب (الشروط) التالية :

١ - مشتقات الدالة $\varphi(x)$ حتى الرتبة الثانية بما في ذلك المشتقة من الرتبة الثانية نفسها تكون متصلة والمشتقة الثالثة متقطعة الاتصال ، وعلاوة على ذلك

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0; \quad \varphi''(0)=\varphi''(l)=0. \quad (40)$$

ولتقارب المتسلسلات

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k=-1, 0, 1)$$

يجب أن نشترط تحقق المطالب التالية للسرعة الابتدائية $\psi(x)$:

٢ - الدالة $\psi(x)$ متصلة وقابلة للتفاضل ولها مشتقة ثانية متقطعة الاتصال ، وعلاوة على ذلك

$$\psi(0)=\psi(l)=0. \quad (41)$$

وبذلك فقد أثبتنا أن أية ذبذبة $u(x, t)$ بالدالتين الابتدائيتين $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ اللتين تحققان الشروط (١) و (٢) يمكن التعبير عنها في صورة تراكب من الموجات المستقرة. والشروط (١) و (٢) تعتبر شروطاً كافية ترتبط بطريقة الإثبات المطبقة هنا.

وقد حلت مسألة مماثلة في فقرة ٥ بند ٢ بطريقة الموجات المنتشرة :

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x - at) + \Phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha, \quad (42)$$

حيث Φ, Ψ يعتبران امتكاليين فرديين بالنسبة إلى $0, l$ ، للدالتين الابتدائيتين $\Phi(x), \Psi(x)$ المقاطعتين في الفترة $(0, l)$ ، والدالتان Φ, Ψ كما أوضحنا دوريتان بفترة دورة $2l$ ، ولذا يمكن التعبير عنها بالتسلسلين

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

حيث Φ_n, Ψ_n معاملات فورييه للدالتين $\Phi(x), \Psi(x)$. وبالتعويض بهاتين للتسلسلين في العلاقة (42) والاستعانة بنظرية جيب وجيب تمام مجموع زاويتين والفرق بين زاويتين نحصل على الصيغة :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Phi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi na} \Psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (43)$$

التي تطبق بالصيغة الناتجة بطريقة فصل المتغيرات .

وبالتالي فالمعلاقة (43) تتحقق عند كل الافتراضات الخاصة بالمعلاقة (42) (انظر فقرة ١ ، بند ٣) التي نتجت بشرط أن تكون الدالة $\Phi(x)$ متصلة وقابلة للتفاضل مرتين والدالة $\Psi(x)$ متصلة وقابلة للتفاضل مرة واحدة .

وبالانتقال إلى الدالتين $\Phi(x), \Psi(x)$ يجب أن نطلب علاوة على شروط القابلية للتفاضل تحقق الشروط التالية أيضاً :

$$\begin{aligned} \Phi(0) = \Phi(l) = 0, \quad \Psi(0) = \Psi(l) = 0, \\ \Phi''(0) = \Phi''(l) = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

وهكذا فالشروط (١) و (٢) التي تعتبر شروطاً كافية لتبرير أساس طريقة فصل المتغيرات تحدد على طريقة الإثبات وتحتوى على شروط إضافية بالمقارنة مع الشروط التي تكفل وجود الحل .

وعند تبرير إمكانية التعبير عن الحل كنتيجة لتراكب الموجات المستقرة أوردنا الطريقة الأولى لإثبات تقارب للتسلسلات لأنها لا ترتبط بالصورة الخاصة (42) القابلة للتطبيق فقط على المعادلة المبسطة للذبذبات ولأن هذه الطريقة يمكن تميمها بلا صعوبة على سلسلة من المسائل الأخرى رغم أنها تشترط مطالب أكثر على الدوال الابتدائية .

فقرة ٤ : المعادلات غير المتجانسة . ندرس المعادلة غير المتجانسة للذبذبات

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad a^2 = \frac{k}{\rho}, \quad 0 < x < l \quad (45)$$

بالشروط الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq l \quad (46)$$

والشروط الحدية المتجانسة

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned} \right\} t > 0. \quad (47)$$

نبحث عن حل المسألة في صورة تحليل في متسلسلة فورييه بـ x

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (48)$$

باعتبار t عند ذلك كبارامتر. ولتعيين $u(x, t)$ ينبغي تعيين الدالة $u_n(t)$. نعتبر عن الدالة $f(x, t)$ والشروط الابتدائية في صورة متسلسلات فورييه :

$$\left. \begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, & f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi; \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, & \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi; \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, & \psi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

بالتعويض عن الصورة المفترضة للحل (48) في المعادلة الأصلية (45)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ -\alpha^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) - \ddot{u}_n(t) + f_n(t) \right\} = 0,$$

نرى أنها ستتحقق إذا كانت كل معاملات التحليل مساوية للصفر أى إذا كان

$$\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \alpha^2 u_n(t) = f_n(t). \quad (50)$$

ولتعيين $u_n(t)$ حصلنا على معادلة تفاضلية عادية بمعاملات ثابتة. وتعطى الشروط الابتدائية :

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

ومن هنا يتبع أن

$$\left. \begin{aligned} u_n(0) &= \varphi_n, \\ \dot{u}_n(0) &= \psi_n. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

وهذان الشرطان الإضافيان يحددان تماماً حل المعادلة (50). والدالة $u_n(t)$ يمكن التعبير عنها في الصورة

$$u_n(t) = u_n^{(1)}(t) + u_n^{(11)}(t),$$

حيث

$$u_n^{(1)}(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \cdot f_n(\tau) d\tau \quad (52)$$

هى حل المعادلة غير المتجانسة بالشروط الابتدائية الصفرية * و

$$u_n^{(11)}(t) = \varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \quad (53)$$

هى المعادلة المتجانسة بالشروط الابتدائية المعطاة. وبذلك يكتب الحل المطلوب في الصورة :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot f_n(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (54)$$

والمجموع الثانى هو عبارة عن حل مسألة الذبذبات الحرة للوتر بالشروط الابتدائية المعطاة وقد سبق بحثها بتفصيل كاف. وننتقل إلى دراسة المجموع الأول الذى يمثل الذبذبات القسرية للوتر تحت تأثير القوة الخارجية بشروط ابتدائية صفرية.

* يمكن التأكد من ذلك مباشرة. والملاحظة (52) يمكن الحصول عليها بطريقة تفاير الثوابت. انظر كذلك نهاية هذه الفقرة.

وبالاستعانة بالصيغة (49) للدوال $f_n(t)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} u^{(n)}(x, t) &= \\ &= \int_0^t \int_0^t \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n a} \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right\} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_0^t \int_0^t G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (55) \end{aligned}$$

حيث

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \quad (56)$$

نوضح المعنى الفيزيائى للحل الناتج . نفرض أن الدالة $f(\xi, \tau)$ مختلفة عن الصفر في جوار صغير صغراً كافياً للنقطة $M_0(\xi_0, \tau_0)$:

$$\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0 + \Delta \xi, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \Delta \tau.$$

والدالة $\rho f(\xi, \tau)$ هي عبارة عن كثافة القوة المؤثرة ، والقوة المؤثرة على الجزء $(\xi_0, \xi_0 + \Delta \xi)$ تساوى

$$F(\tau) = \rho \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} f(\xi, \tau) d\xi,$$

علمًا بأن

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta \tau} F(\tau) d\tau = \rho \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta \tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

هو دفع هذه القوة خلال الفترة الزمنية $\Delta \tau$. وإذا طبقنا نظرية القيمة المتوسطة على الصيغة :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_0^t G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta \tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

سنحصل على :

$$u(x, t) = G(x, \xi, t-\tau) \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta \tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (57)$$

$$\xi_0 \leq \bar{\xi} \leq \xi_0 + \Delta \xi, \quad \tau_0 \leq \bar{\tau} \leq \tau_0 + \Delta \tau. \quad \text{حيث}$$

وبالانتقال في العلاقة (57) إلى النهاية عند $\Delta \xi \rightarrow 0$ - $\Delta \tau \rightarrow 0$ نحصل على الدالة

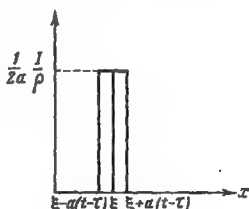
$$u(x, t) = G(x, \xi_0, t - \tau_0) \frac{I}{\rho}, \quad (58)$$

التي يمكن تفسيرها على أنها تأثير الدفع اللحظي المركز ذى القدرة I . وإذا علمت الدالة $\frac{I}{\rho} G(x, \xi, t - \tau)$ المعبرة عن تأثير وحدة الدفع المركز فإنه يتضح مباشرة أن تأثير القوة $f(x, t)$ الموزعة توزيعاً منتظماً يجب أن يمثل بالعلاقة

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (59)$$

التي تنطبق على العلاقة (55) الناتجة أعلاه.

ودالة تأثير الدفع المركز للمستقيم اللانهائي درست في البند السابق. ونذكر القارئ بأنها تكون دالة متقطعة الثبات مساوية $\frac{1}{2a} \frac{I}{\rho}$ داخل الزاوية المميزة العليا للنقطة (ξ, τ) وصفراً خارج هذه الزاوية. ودالة تأثير الدفع المركز للوتر المثبت $(0, l)$ يمكن أن تنتج من دالة التأثير للوتر اللانهائي بواسطة الاستكمال الفردي بالنسبة إلى النقطتين



شكل ٢٣

$$x = 0, \quad x = l$$

ندرس لحظة زمنية t قريبة قريباً كافياً من τ حيناً لا يكون قد حدث بعد تأثير الانعكاس عن الطرفين $x = 0, x = l$. وهذه اللحظة تمثل دالة التأثير بالرسم المبين في شكل ٢٣. نحلل هذه الدالة (يفرض $I = \rho$) في متسلسلة فورييه $\sin \frac{\pi n}{l} x$ وتكون معاملات فورييه مساوية:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l G(\alpha, \xi, t - \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \alpha d\alpha = \frac{1}{al} \int_{\xi - a(t-\tau)}^{\xi + a(t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} \alpha d\alpha =$$

$$= \frac{1}{a\pi n} \left\{ \cos \frac{\pi n}{l} [\xi - a(t - \tau)] - \cos \frac{\pi n}{l} [\xi + a(t - \tau)] \right\} =$$

$$= \frac{2}{a\pi n} \sin \frac{\pi n}{l} \xi \sin \frac{\pi n}{l} a(t - \tau).$$

ومن هنا نحصل على العلاقة

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{l} a(t - \tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi, \quad (60)$$

التي تنطبق على العلاقة (56) التي حصلنا عليها بطريقة فصل المتغيرات .

ولقيم t التي عندها يبدأ تأثير الطرفين المثبتين في الحدوث يكون تكوين دالة التأثير بواسطة المميزات عملية مطولة ، أما التعبير عن هذه الدالة في صورة متسلسلة فورييه فيحتفظ بصحته في هذه الحالة أيضا .

وسنكتفي هنا بالتكوين الشكلي (الصوري) للحل دون توضيح لشروط قابلية العلاقة الناتجة للتطبيق .

ندرس المعادلة الخطية غير المتجانسة بمعاملات ثابتة

$$L(n) = u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} u^{(1)} + p_n u = f(t) \quad (1^*)$$

$$\left(u^{(n)} = \frac{d^n u}{dt^n} \right)$$

بالشروط الابتدائية

$$u^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2^*)$$

ويعطى حلها بالعلاقة

$$u(t) = \int_0^t U(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (3^*)$$

حيث $U(t)$ حل المعادلة المتجانسة

$$L(U) = 0$$

بالشروط الابتدائية

$$U^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, \dots, n-2), \quad U^{(n-1)}(0) = 1. \quad (4^*)$$

بالفعل . بحساب مشتقات $u(t)$ بضاضل الأطراف المعنى بالنسبة إلى t نجد أن

$$\left. \begin{aligned} u^{(1)}(t) &= \int_0^t U^{(1)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + U(0) f(t) & [U(0) &= 0], \\ u^{(2)}(t) &= \int_0^t U^{(2)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + U^{(1)}(0) f(t) & [U^{(1)}(0) &= 0], \\ &\dots\dots\dots \\ u^{(n-1)}(t) &= \int_0^t U^{(n-1)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + U^{(n-2)}(0) f(t) & [U^{(n-2)}(0) &= 0], \\ u^{(n)}(t) &= \int_0^t U^{(n)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + U^{(n-1)}(0) f(t) & [U^{(n-1)}(0) &= 1]. \end{aligned} \right\} (5^*)$$

بالتعويض بهذه المشتقات في المعادلة (1*) نحصل على :

$$L(u) = \int_0^t L[U(t-\tau)] f(\tau) d\tau + f(t) = f(t),$$

أي أن المعادلة تتحقق . ومن الواضح أن الشروط الابتدائية (2*) تحقق أيضاً .

وليس من الصعب إعطاء تفسير فيزيائى واضح للدالة $U(t)$ وللعلاقة (3*). عادلة تعبر الدالة $u(t)$ عن إزاحة مجموعة ما . و $f(t)$ عن القوة المؤثرة على هذه المجموعة . نفرض أنه لـ $t < 0$ كانت مجموعتنا في حالة السكون وتصبح إزاحتها بالدالة $f_0(t) (\geq 0)$ التى تختلف عن الصفر فقط في الفترة الزمنية $0 < t < \varepsilon$. ونرمز لدفع هذه القوة بالرمز

$$I = \int_0^\varepsilon f_0(\tau) d\tau.$$

ونرمز بالرمز $u_\varepsilon(t)$ للدالة للناظرة للدالة $f_\varepsilon(t)$ معبرين ε بارامترًا مع فرض $I = 1$. وليس من الصعب التأكد من أنه عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ توجد $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t)$ دون اعتماد على طريقة اختيار $f_\varepsilon(t)$ ومن أن هذه النهاية تساوى الدالة المعروفة أعلاه $U(t)$

$$U(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t),$$

وذلك إذا وضعنا $U(t) = 0$ لحالة $t < 0$. وبذلك فإن الدالة $U(t)$ من الطبعي أن تسمى بدالة تأثير الدفع اللحظى .

بالفعل . فبدلالة العلاقة (3*) وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة نحصل على :

$$u_\varepsilon(t) = U(t - \tau_\varepsilon) \int_0^\varepsilon f_0(\tau) d\tau = U(t - \tau_\varepsilon) \quad (0 \leq \tau_\varepsilon < \varepsilon < t).$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ نرى أنه توجد النهاية

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(t - \tau_{\varepsilon}) = U(t),$$

كما يثبت منطوقنا .

وننتقل الآن إلى تمثيل حل المعادلة غير المتجانسة بواسطة دالة تأثير الدفع اللحظي . بتقسيم الفترة $(0, t)$ بالنقط τ_i إلى أجزاء متساوية

$$\Delta \tau = \frac{t}{m},$$

نمبر عن الدالة $f(t)$ في الصورة

$$f(t) = \sum_{i=1}^m f_i(t),$$

حيث

$$f_i(t) = \begin{cases} 0 & (t < \tau_i \text{ و } t \geq \tau_{i+1}) \\ f(t) & (\tau_i \leq t < \tau_{i+1}) \end{cases} \text{ عند}$$

عندئذ نحصل على الدالة

$$u(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t),$$

حيث $u_i(t)$ هي حلول المعادلة $L(u_i) = f_i$ بمعطيات ابتدائية صفرية .

وإذا كان m كبيراً بقدر كاف فإن الدالة $u_i(t)$ يمكن اعتبارها دالة تأثير الدفع اللحظي الذي شدته :

$$I = f_i(\tau_i) \Delta \tau = f(\tau_i) \Delta \tau,$$

ومن ثم فإن

$$u(t) = \sum_{i=1}^m U(t - \tau_i) f(\tau_i) \Delta \tau \xrightarrow{\Delta \tau \rightarrow 0} \int_0^t U(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

أى إننا نتوصل إلى العلاقة

$$u(t) = \int_0^t U(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

التي تبين أن تأثير القوة المؤثرة باتصال يمكن التعبير عنه بتراكب تأثيرات الدفع اللحظية .

وفي الحالة المدروسة أعلاه تحقق $u_n^{(1)}$ المعادلة (50) والشروط $u_n(0) = \dot{u}_n(0) = 0$. ولدالة التأثير $U(t)$ نحصل على :

$$\ddot{U} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 U = 0, \quad U(0) = 0, \quad \dot{U}(0) = \frac{1}{a}$$

ومن ثم فإن

$$U(t) = \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi n}{l} a t.$$

ومن هنا ومن (3*) نحصل على العلاقة (52)

$$u_n^{(1)}(t) = \int_0^t U(t-\tau) f_n(\tau) d\tau = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a (t-\tau) f_n(\tau) d\tau.$$

والتعبير التكاملي (3*) الناتج أعلاه لحل المعادلة التفاضلية العادية (1*) يحل كما تأكدنا نفس المعنى الفيزيائي كالعلاقة (59) التي تعطي التعبير التكاملي لحل المعادلة غير المتجانسة للذبذبات.

فقرة 5 : المسألة العامة الحدية الأولى . ندرس المسألة العامة الحدية الأولى

لمعادلة الذبذبات :

عين حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (45)$$

بالشروط الإضافية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l; \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0. \quad (47)$$

ندرج دالة مجهولة جديدة $v(x, t)$ بفرض أن :

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t),$$

وبذلك فالدالة $v(x, t)$ هي عبارة عن انحراف الدالة $u(x, t)$ عن دالة ما معلومة $U(x, t)$.

وهذه الدالة $v(x, t)$ ستحدد كحل للمعادلة

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_{tt} - a^2 U_{xx}]$$

بالشروط الإضافية

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0),$$

$$v_t(x, 0) = \bar{\psi}(x); \quad \bar{\psi}(x) = \psi(x) - U_t(x, 0);$$

$$\begin{aligned} v(0, t) &= \bar{\mu}_1(t), \quad \bar{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0, t), \\ v(l, t) &= \bar{\mu}_2(t); \quad \bar{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l, t). \end{aligned}$$

نختار الدالة المساعدة $U(x, t)$ بحيث يكون

$$\bar{\mu}_1(t) = 0, \quad \bar{\mu}_2(t) = 0;$$

ولهذا الغرض يكفي أن نضع

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

وبذلك فالمسألة العامة الحدية الأولى للدالة $u(x, t)$ قد آلت إلى المسألة الحدية للدالة $v(x, t)$ بشروط حدية صفرية. وطريقة حل هذه المسألة عرضناها فيما سبق (انظر فقرة ٤).

فقرة ٦ : المسائل الحدية ذات عدم التجانسات المستقرة زمنياً. إن المسائل الحدية ذات عدم التجانسات المستقرة زمنياً أى عندما لا تعتمد الشروط الحدية والطرف الأيمن للمعادلة على الزمن تعتبر فئة هامة للغاية من المسائل :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \quad (45')$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= u_1, \quad u_1 = \text{const}, \\ u(l, t) &= u_2, \quad u_2 = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (47')$$

وفي هذه الحالة من الطبيعي البحث عن الحل في صورة المجموع

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

حيث $\bar{u}(x)$ الحالة المستقرة (الانحناء الاستاتيكي) للوتر المعرفة بالشروط

$$a^2 \bar{u}''(x) + f_0(x) = 0,$$

$$\bar{u}(0) = u_1,$$

$$\bar{u}(l) = u_2,$$

و $v(x, t)$ الانحراف عن الحالة المستقرة. ولا يصعب ملاحظة أن الدالة $\bar{u}(x)$ تكون مساوية

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l} + \frac{x}{l} \int_0^l d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2} d\xi_2 - \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2} d\xi_2.$$

وكحالة خاصة إذا كان $f_0 = \text{const}$ فإن

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l} + \frac{f_0}{2a^2} (lx - x^2).$$

ومن الواضح أن الدالة $v(x, t)$ تحقق المعادلة المتجانسة

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

بالشروط الحدية المتجانسة

$$v(0, t) = 0,$$

$$v(l, t) = 0$$

والشروط الابتدائية

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - \bar{u}(x),$$

$$v_t(x, 0) = \psi(x).$$

وبذلك فإن v هي حل المسألة الحدية المبسطة التي سبق لنا دراستها في فقرة ١ من هذا البند.

عند استنباطنا لمعادلة ذبذبات الوتر وفي حالات أخرى كثيرة لم نأخذ في اعتبارنا تأثير قوة الجاذبية. وبما سبق ذكره ينتج أنه بدلاً من الأخذ في الاعتبار صراحة قوة الجاذبية (ويوجه عام القوى التي لا تعتمد على الزمن) يكفي أن نأخذ في الاعتبار الانحراف عن الحالة المستقرة زمنياً.

نحل مسألة مبسطة من هذا النمط بشروط ابتدائية صفرية :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \quad (45'')$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (46')$$

$$u(0, t) = u_1, \quad u(l, t) = u_2. \quad (47'')$$

وفي هذه الحالة نحصل للدالة $v(x, t)$ على المسألة

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) = -\bar{u}(x), \quad v_t(x, 0) = 0,$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

ولا يصعب التأكد من أنه لحل هذه المسألة لا توجد ضرورة للاستعانة بالصيغة التحليلية الدقيقة للدالة $\bar{u}(x)$.
وصيغة $v(x, t)$ وفقاً للعلاقة (17) تكون على الصورة :

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x), \quad \text{حيث}$$

$$X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x \left(\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l} \right)$$

هى الدالة الذاتية للمسألة الحدية التالية :

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (8)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (10)$$

ومن الشروط الابتدائية يتبع أن

$$B_n = 0$$

$$A_n = -\frac{2}{l} \int_0^l u(x) X_n(x) dx.$$

ولحساب مثل هذا التكامل نختار الطريقة التالية سهلة للغاية :

بالاستعانة بالمعادلة (8) نجد أن :

$$X_n(x) = -\frac{1}{\lambda_n} X_n''(x).$$

نعوض بهذه الصيغة في العلاقة الخاصة بـ A_n ونجرى التكامل المكرر مرتين بالتجزئة فنحصل على

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n} \int_0^l u(x) X_n''(x) dx = \frac{2}{l\lambda_n} \left\{ u X_n'(x) \Big|_0^l - u' X_n \Big|_0^l + \int_0^l u'' X_n(x) dx \right\},$$

ومن هنا وبالأخذ في الاعتبار المعادلة والشروط الحدية للدالة $\bar{u}(x)$ نجد أن :

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n} \left[u_2 X_n'(l) - u_1 X_n'(0) - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x) dx \right]$$

أو

$$A_n = \frac{2}{\pi n} \left[u_2 (-1)^n - u_1 - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x) dx \right].$$

وكحالة خاصة نحصل للمعادلة المتجانسة $(f_0(x) = 0)$ على :

$$A_n = \frac{2}{\pi n} [u_2 (-1)^n - u_1].$$

وهذه الطريقة تكون مناسبة لحساب معاملات فورييه للشروط الحدية من النوع الثاني والثالث وكذلك في حالة المسألة الحدية للوتر غير المتجانس

$$\frac{d}{dx} \left[h(x) \frac{dX}{dx} \right] + \lambda p(x) X = 0,$$

إذا كانت الدوال الذاتية والقيم الذاتية معلومة .

فقرة ٧ : المسائل بدون الشروط الابتدائية . يمكن كما سبق أن أوضحنا أن تقول مسألة ذبذبة الوتر بنظام حدى معطى إلى حل المعادلة غير المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية .

غير أن مثل هذه الطريقة كثيرًا ما تعقد حل المسألة الذى يمكن إيجادها مباشرة . عند دراسة تأثير النظام الحدى من المهم تعيين حل خاص ما (للمعادلة المتجانسة) يحقق الشروط الحدية المعطاة وذلك لأن حساب الفرق الناتج من الشروط الابتدائية المعطاة (التصحيح) يؤول إلى حل نفس المعادلة بشروط حدية صفرية .

والمسائل بدون شروط ابتدائية تعتبر فئة هامة للغاية من مسائل انتشار النظام الحدى .

وإذا كان النظام الحدى يؤثر وقتًا طويلًا بقدر كاف فإنه بسبب الاحتكاك الذى تتصف به أى مجموعة فيزيائية حقيقية يضعف تأثير المعطيات الابتدائية مع مرور الزمن . وبذلك فإننا نصل بشكل طبعى إلى المسألة بدون شروط ابتدائية (I) :

عين حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t \quad (\alpha > 0), \quad 0 < x < l, \quad t > -\infty \quad (61)$$

بالشروط الحدية المعطاة :

$$u(0, t) = \mu_1(t),$$

$$u(l, t) = \mu_2(t).$$

(Ia)

وهذه المسألة نسميها المسألة (I₀) .

والحد αu_t في الطرف الأيمن للمعادلة يناظر الاحتكاك ويتناسب مع السرعة .

ندرس أولاً مسألة انتشار النظام الحدى الدورى :

$$(u(l, t) = B \sin \omega t \text{ أو } u(l, t) = A \cos \omega t) \quad (62)$$

$$u(0, t) = 0. \quad (63)$$

وللمستقبل من المناسب لنا أن نكتب الشرط الحدى في الصورة المركبة (بمساعدة الدوال في المتغير المركب) :

$$u(l, t) = A e^{i \omega t}. \quad (64)$$

وإذا كانت الدالة

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + i u^{(2)}(x, t)$$

تحقق المعادلة (61) بالشروط الحدية (63) ، فإن $u^{(1)}(x, t)$ و $u^{(2)}(x, t)$ - وهما جزءاها الحقيقي والتخيلي - يحققان كل على انفراد نفس المعادلة (نظراً لخطية المعادلة) وكذلك الشرط (63) والشروط الحدية عند $x = l$

$$u^{(1)}(l, t) = A \cos \omega t,$$

$$u^{(2)}(l, t) = A \sin \omega t.$$

وهكذا نعين حل المسألة

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} - \alpha u_t, \\ u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= A e^{i \omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

بفرض

$$u(x, t) = X(x) e^{i \omega t}$$

وبالتعويض بهذه الصيغة في المعادلة نحصل للدالة $X(x)$ على المسألة التالية :

$$X'' + k^2 X = 0 \cdot \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} - i \alpha \frac{\omega}{a^2} \right), \quad (66)$$

$$X(0) = 0, \quad (67)$$

$$X(l) = A. \quad (68)$$

ومن المعادلة (66) والشرط الحدى (67) نعين :

$$X(x) = C \sin kx.$$

ويعطى الشرط عند $x=l$:

$$C = \frac{A}{\sin kl}, \quad (69)$$

ومن ثم

$$X(x) = A \frac{\sin kx}{\sin kl} = X_1(x) + iX_2(x), \quad (70)$$

حيث $X_1(x)$, $X_2(x)$ هما جزءا $X(x)$ الحقيقى والتخيلى .

ويمكن التعبير عن الحل المطلوب فى الصورة

$$u(x, t) = [X_1(x) + iX_2(x)] e^{i\omega t} = u^{(1)}(x, t) + iu^{(2)}(x, t),$$

حيث

$$u^{(1)}(x, t) = X_1(x) \cos \omega t - X_2(x) \sin \omega t,$$

$$u^{(2)}(x, t) = X_1(x) \sin \omega t + X_2(x) \cos \omega t.$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\alpha \rightarrow 0$ نجد أن

$$\bar{k} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} k = \frac{\omega}{a} \quad (71)$$

وبالتالى فإن

$$\bar{u}^{(1)}(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u^{(1)}(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \cos \omega t, \quad (72)$$

$$\bar{u}^{(2)}(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u^{(2)}(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \omega t. \quad (73)$$

ندرس المسألة التالية :

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & t > -\infty; \\ u(0, t) &= \mu_1(t), & t > -\infty; \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (I_0)$$

ونسمىها بالمسألة (I_0) . ومن الواضح أن $\bar{u}^{(1)}(x, t)$ و $\bar{u}^{(2)}(x, t)$ يعتبران حلين للمسألة (I_0) بالشروط الحدية :

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(1)}(0, t) &= 0, & \bar{u}^{(1)}(l, t) &= A \cos \omega t, \\ \bar{u}^{(2)}(0, t) &= 0, & \bar{u}^{(2)}(l, t) &= A \sin \omega t.\end{aligned}$$

وحل المسألة عند $\alpha = 0$ لا يوجد دائماً. فإذا كان تردد الذبذبات القسرية ω منطبقاً على التردد الذاتي ω_n للذبذبات الوتر المثبت الطرفين :

$$\omega = \omega_n = \frac{\pi n}{l} a,$$

فإن مقام علاقتي $\bar{u}^{(1)}$, $\bar{u}^{(2)}$ يؤول إلى الصفر ولا يوجد حل للمسألة بدون الشروط الابتدائية.

ولهذه الحقيقة معنى فيزيائي بسيط : فعند $\omega = \omega_n$ يحدث الرنين أى لا يوجد نظام مستقر. وتزداد السعة بلا حدود ابتداء من لحظة زمنية معينة $t = t_0$. وعند وجود احتكاك ($\alpha \neq 0$) يمكن وجود النظام المستقر لأى ω لأن $\sin kl \neq 0$ عندما يكون k عدداً مركباً.

وإذا كان $\mu_1(t) = 0$ وكانت $\mu_2(t)$ دالة دورية قابلة للتمثيل في صورة متسلسلة :

$$\mu_2(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t), \quad (74)$$

حيث ω أصغر تردد ، A_n , B_n معاملات فورييه ، فإن حل المسألة لحالة $\alpha = 0$ يأخذ الصورة

$$\bar{u}(x, t) = \frac{A_0}{2l} x + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t) \frac{\sin \frac{\omega n}{a} x}{\sin \frac{\omega n}{a} l},$$

فقط ما لم ينطبق أحد الترددات ωn على الترددات الذاتية للوتر المثبت.

أما إذا كانت $\mu_2(t)$ دالة غير دورية فإنه بتحليلها في تكامل فورييه بطريقة مماثلة يمكن الحصول على الحل في صورة تكاملية.

ونشير إلى أن حل المسألة بدون الشروط الابتدائية عندما $\alpha = 0$ معرف تعريفاً غير أحادى القيمة ما لم نفترض شروطاً إضافية ما . بالفعل إذا أضفنا إلى أى حل لهذه المسألة أية تركيبة من الموجات المستقرة

$$\sum \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

حيث A_n, B_n ثوابت اختيارية ، نرى أن هذا المجموع سيحقق نفس المعادلة ونفس الشروط الحدية .

وللحصول على حل وحيد للمسألة (I_α) عندما $\alpha = 0$ نورد شرطاً إضافياً « للاحتكاك المتلاشي » :

حل المسألة (I_0) يسمى محققاً لشرط « الاحتكاك المتلاشي » إذا كان حلاً للمسألة (I_α) عندما $\alpha \rightarrow 0$.

وبالمثل نحل المسألة إذا كان الطرف $x = l$ مثبتاً وعند $x = 0$ معطى نظام حدى .

وحل المسألة العامة بدون الشروط الابتدائية

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

يتحدد في صورة مجموع حدين ، لكل حد منها يكون أحد الشرطين الحديين فقط غير متجانس .

نثبت وحدانية الحل المحدود للمسألة بدون الشروط الابتدائية للمعادلة (61) . وعند ذلك نستفرض اتصال الحل هو ومشتقاته حتى الرتبة الثانية بما في ذلك مشتقات الرتبة الثانية نفسها . في المنطقة $0 \leq x \leq l, -\infty < t < t_0$ إذا كانت القيم الحدية

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

معرفة في المنطقة $-\infty < t < t_0$.

نفرض أن $u_1(x, t), u_2(x, t)$ حلان محددان للمسألة المدروسة (I) .

$$|u_1| < M, \quad |u_2| < M,$$

حيث $M > 0$ عدد ما .

والفرق بين هاتين الدالتين

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

محدود $(|v| < 2M)$ ويتحقق المعادلة (61) والشروط الحدية للتجانسة

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

ومعاملات فورييه للدالة v :

$$v_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l v(x, t) \sin \frac{\pi n}{l} x dx,$$

من الواضح أنها تحقق المعادلة :

$$\ddot{v}_n + a\dot{v}_n + \omega_n^2 v_n = 0 \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right), \quad (٥)$$

وذلك لأن المشتقات الثانية للدالة $v(x, t)$ متصلة في الفترة $0 \leq x \leq l$.

والحل العام للمعادلة (٥) يكون على الصورة :

$$v_n(t) = A_n e^{q_n^{(1)} t} + B_n e^{q_n^{(2)} t} \quad (٥٥)$$

حيث $q_n^{(1)}, q_n^{(2)}$ جذرا للمعادلة المميزة ويساويان

$$q_n^{(1)} = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \omega_n^2}, \quad q_n^{(2)} = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \omega_n^2} \quad (\alpha > 0).$$

وحيث أن $\alpha > 0$ فإن $\operatorname{Re} q_n^{(1,2)} < 0$ وبالتالي فإن الحل (٥٥) للمعادلة (٥) يكون محدودا عندما

$t \rightarrow -\infty$ فقط عندما $B_n = 0$ أي أن $v_n(t) = 0$ لأي n .
وبذلك فإن

$$v(x, t) = 0, \quad u_1(x, t) = u_2(x, t).$$

فقرة ٨ : القوة المركزة. ندرس مسألة ذبذبات الوتر تحت تأثير قوة مركزة مؤثرة في النقطة $x = x_0$. وإذا كانت القوة موزعة على جزء ما $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ فإن الحل يعين بالعلاقة (55). وبالاتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ يمكن الحصول على حل المسألة المطروحة.

ومن ناحية أخرى فقد رأينا عند استنباط معادلة الذبذبات (انظر (8)) ،
فقرة ١ ، بند ١) أنه في النقطة x_0 حيث تؤثر القوة المركزة يحدث انفصال للمشتقة الأولى وتظل الدالة نفسها متصلة. والحل $u(x, t)$ لمسألة ذبذبات الوتر تحت تأثير القوة المركزة في النقطة x_0 يمكن التعبير عنه بدالتين مختلفتين :

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq x_0 & \text{ عند } u(x, t) = u_1(x, t) \\ x_0 \leq x \leq l & \text{ عند } u(x, t) = u_2(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

وهاتان الدالتان يجب أن تحققا المعادلة

$$x \neq x_0 \text{ عند } u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (76)$$

والشروط الحدية الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u_1(0, t) &= 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_2(l, t) &= 0; \quad u_2(x, 0) = \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

وشروط الترافق عند النقطة $x = x_0$ (انظر (8) - بند ١) لتكونة من شرط اتصال الدالة $u(x, t)$:

$$u_1(x_0, t) = u_2(x_0, t), \quad (78)$$

ومن الشرط الذى يربط بين مقدار انفصال المشتقة وبين القوة $f(t)$ المركزة فى النقطة x_0 :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0-0}^{x_0+0} = \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_0, t) - \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_0, t) = -\frac{f(t)}{h}. \quad (79)$$

ولا توجد ضرورة للاهتمام بتحقيق الشروط الابتدائية. فإذا وجدنا حلاً خاصاً للمعادلة (76) يحقق الشروط الحدية من (77) وكذلك (78) و (79) فإننا بإضافة حل المعادلة المتجانسة للذبذبات إليه نستطيع دائماً تحقيق الشروط الابتدائية المعطاة.

ندرس حالة خاصة

$$f(t) = A \cos \omega t, \quad -\infty < t < +\infty$$

ونعين الحل الذى يحقق فقط الشروط الحدية بافتراض أن الدالة تؤثر طول الوقت ابتداء من $t = -\infty$ (نظام مستقر) أى نحل المسألة بدون الشروط الابتدائية. نبحث عن الحل فى الصورة

$$\begin{aligned} & \text{عندما } 0 \leq x \leq x_0 \quad u_1(x, t) = X_1(x) \cos \omega t \\ & \text{عندما } x_0 \leq x \leq l \quad u_2(x, t) = X_2(x) \cos \omega t \end{aligned}$$

ومن المعادلة (76) يتبع:

$$\left. \begin{aligned} & 0 \leq x \leq x_0 \quad \text{عندما } X_1'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X_1 = 0 \\ & x_0 \leq x \leq l \quad \text{عندما } X_2'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

والدالتان X_1 , X_2 علاوة على ذلك يجب أن تحققا الشرطين الحديين

$$X_1(0)=0, \quad X_2(l)=0, \quad (81)$$

الناجمين من (77) وكذلك يجب أن تحققا شرطى التوافق

$$X_1(x_0)=X_2(x_0), \quad X_1'(x_0)-X_2'(x_0)=\frac{A}{k}, \quad (82)$$

الناجمين من (78) , (79) .

ومن المعادلة (80) والشرطين (81) نحصل على :

$$X_1(x)=C \sin \frac{\omega}{a} x, \quad X_2(x)=D \sin \frac{\omega}{a} (l-x);$$

وشرطا التوافق (82) يعطيان

$$C \sin \frac{\omega}{a} x_0 - D \sin \frac{\omega}{a} (l-x_0) = 0,$$

$$C \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} x_0 + D \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} (l-x_0) = \frac{A}{k}.$$

وبتعيين المعاملين C , D من هذه العلاقات نجد أن :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \frac{Aa}{k\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a} (l-x_0)}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \frac{\omega}{a} x \cos \omega t & (0 \leq x \leq x_0 \text{ عند}) \\ u_2 = \frac{Aa}{k\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a} x_0}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \frac{\omega}{a} (l-x) \cos \omega t & (x_0 \leq x \leq l \text{ عند}) \end{cases}$$

وبالمثل يكتب الحل عندما $f(t) = A \sin \omega t$.

وهكذا حصلنا على الحل لحالة $f(t) = A \cos \omega t$ أو $f(t) = A \sin \omega t$.

وإذا كانت الدالة $f(t)$ دورية وتساوى

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + \beta_n \sin n\omega t)$$

(ω أصغر تردد) فن الواضح أن :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \frac{1}{k} \left\{ \frac{\alpha_0 x}{2} \left(1 - \frac{x_0}{l} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \sin \frac{\omega n}{a} (l - x_0)}{\omega n \sin \frac{\omega n}{a} l} \sin \frac{\omega n x}{a} \right\} \times \\ \quad \times (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \sin \omega n t), \quad 0 \leq x \leq x_0; \\ u_2 = \frac{1}{k} \left\{ \frac{\alpha_0 x_0}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \sin \frac{\omega n}{a} x_0}{\omega n \sin \frac{\omega n}{a} l} \sin \frac{\omega n (l - x)}{a} \right\} \times \\ \quad \times (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \sin \omega n t), \quad x_0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (83)^*$$

وإذا كانت الدالة $f(t)$ غير دورية فإنه بالتعبير عنها في صورة تكامل فورييه يمكن بطريقة مماثلة الحصول على الحل في صورة تكاملية.

وإذا كان مقام الدالتين (83) يساوى الصفر

$$\sin \frac{\omega n l}{a} = 0,$$

$$\omega n = \frac{\pi m}{l} a = \omega_m,$$

أى إذا كانت فئة ترددات القوة الاضطرابية المؤثرة تحتوى على أحد الترددات الذاتية للذبذبات (الرنين) فإن النظام المستقر لن يوجد.

وإذا كانت نقطة تأثير القوة x_0 إحدى عقد الموجة المستقرة المناظرة للذبذبة الحرة بالتردد ω_m فإن

$$\sin \frac{\omega_m}{a} x_0 = 0,$$

$$\sin \frac{\omega_m}{a} (l - x_0) = 0.$$

وعند ذلك فإن البسط في الحدود المناظرة في الدالة u يؤول إلى الصفر ولا تنشأ

* الحدان الأولان في هذين المجموعتين يناظران الانحناء المستقر (الاستاتيكي) المعروف وفقاً لمقدار القوة $f(t) = \alpha_0/2 = \text{const}$ كما يسهل ملاحظة ذلك بالدالتين :

$$u = \begin{cases} u_1(x, t) = u_1(x) = \frac{1}{k} \frac{\alpha_0}{2} x \left(1 - \frac{x_0}{l} \right) & (\text{عند } 0 \leq x \leq x_0) \\ u_2(x, t) = u_2(x) = \frac{1}{k} \frac{\alpha_0}{2} x_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right) & (\text{عند } x_0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

ظاهرة الرنين. أما إذا كانت نقطة تأثير القوة المؤثرة بتردد ω_m هي بطن الموجة المستقرة المناظرة بالتردد ω_m فإن

$$\sin \frac{\omega_m}{a} x_0 = 1,$$

وتنشأ ظاهرة الرنين بأكثر حدة ممكنة.

ومن هنا نتج قاعدة هي إنه لإحداث الرنين في الوتر عند التأثير عليه بقوة مركزة يجب أن يكون تردد القوة ω مساوياً لأحد الترددات الذاتية للوتر وأن تنطبق نقطة تأثير القوة على إحدى بطون الموجة المستقرة.

فقرة ٩ : الشكل العام لطريقة فصل المتغيرات. إن طريقة فصل المتغيرات قابلة للتطبيق ليس فقط على معادلة ذبذبات الوتر المتجانس وإنما أيضاً على معادلة ذبذبات الوتر غير المتجانس. لندرس المسألة التالية :

عين حل المعادلة

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x) u = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (84)$$

الذى يحقق الشروط

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (85)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (86)$$

وهنا ρ, q, k دوال متصلة في الفترة $0 \leq x \leq l$ وموجبة ($k > 0$), $q \geq 0, \rho > 0$ *. نجرى حل هذه المسألة بطريقة فصل المتغيرات. وللبحث عن الحلول الخاصة نلجأ، كما سبق، إلى المسألة للمساعدة عن وجود الموجات المستقرة :

عين الحل غير التافه للمعادلة (84) الذى يحقق الشروط الحدية

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

* ندرس تلك الحالة عندما يؤول $k(x)$ إلى الصفر في بعض النقط دراسة متصلة (انظر الملحق ٢).

ويقبل التمثيل في صورة حاصل الضرب

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

بالتعويض بالصيغة المفترضة للحل في المعادلة والاستعانة بالشروط الحدية ، نحصل بعد فصل المتغيرات على :

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dX}{dx} \right] - qX + \lambda \rho X = 0,$$

$$T'' + \lambda T = 0.$$

ولتعيين الدالة $X(x)$ نحصل على المسألة الحدية التالية للقيم الذاتية* :

عين تلك القيم البارامتر λ التي يوجد عندها حلول غير تافهة للمسألة :

$$L(X) + \lambda \rho X = 0, \quad (87)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (88)$$

وكذلك عين هذه الحلول . وتسمى قيم البارامتر λ هذه بالقيم الذاتية وتسمى الحلول غير التافهة المناظرة لها بالدوال الذاتية للمسألة (88) — (87) . نصيغ الخصائص الأساسية للدوال الذاتية والقيم الذاتية للمسألة الحدية (87) و (88) اللازمة لشرحنا التالي .

١ - توجد فئة قابلة للعد (countable set) من القيم الذاتية $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \dots$ التي تناظرها حلول غير تافهة للمسألة هي الدوال الذاتية $X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x), \dots$

٢ - عندما يكون $q \geq 0$ تكون كل القيم الذاتية لـ λ_n موجبة .

* عندما $\rho = \rho_0 = \text{const}, k = k_0 = \text{const}$ نحصل على المسألة الحدية للذبذبات الذاتية للوتر المثبت الطرفين :

$$X'' + \mu X = 0 \quad \left(\mu = \frac{\rho_0}{k_0} \lambda \right)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0,$$

التي سبق بحثها في بند ٢ .

٣ - الدوال الذاتية $X_m(x)$, $X_n(x)$ تكون عند $m \neq n$ متعامدة فيما بينها بالوزن $\rho(x)$ في الفترة المغلقة l : $0 \leq x \leq l$:

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0 \quad (m \neq n). \quad (89)$$

٤ - (نظرية القابلية للتحليل - نظرية ف. ستيكوف) . الدالة الاختيارية $F(x)$ القابلة للتفاضل باتصال مرتين والتي تحقق الشروط الحدية $F(0) = F(l) = 0$ تحلل في متسلسلة منتظمة ومطلقة التقارب بالدوال الذاتية $\{X_n(x)\}$:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x), \quad F_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l F(x) X_n(x) \rho(x) dx, \quad (90)$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx.$$

ويبنى عادة إثبات المنطوقين ١ و ٤ على نظرية المعادلات التكاملية ولن نورد هنا . وفي هذه الفقرة سنثبت فقط الخاصيتين ٢ و ٣ .

وقبل أن تنتقل إلى إثبات هذه الخواص نستنبط علاقة تسمى علاقة جرين . نفرض أن $u(x)$ و $v(x)$ دالتان اختياريتان قابلتان للتفاضل مرتين في الفترة $a < x < b$ ، والمشتقة الأولى لكل منهما موجودة ومتصلة في الفترة المغلقة $a \leq x \leq b$. لندرس الصيغة

$$uL[v] - vL[u] = u(kv')' - v(ku')' = [k(uv' - vu')]'.$$

ويتكامل هذه المتساوية بالنسبة إلى x من a إلى b نحصل على علاقة جرين

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u]) dx = k(uv' - vu') \Big|_a^b. \quad (91)$$

نثبت الخاصية ٣ . نفرض أن $X_m(x)$, $X_n(x)$ دالتان ذاتيتان تناظران القيمتين الذاتيتين λ_m , λ_n . بفرض $\lambda_m \neq \lambda_n$. بفرض $u = X_m(x)$, $v = X_n(x)$ في العلاقة (91) مع

الآخذ في الاعتبار الشروط الحدية (88) نحصل على * :

$$\int_0^l \{X_m L[X_n] - X_n L[X_m]\} dx = 0 \quad (a=0, b=l),$$

ومن هنا وبلاستعانة بالمعادلة (87) نحصل على :

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0.$$

وبذلك فإذا كان $\lambda_n \neq \lambda_m$ فإنه يتحقق الشرط

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0, \quad (92)$$

الذى يعبر عن تعامد الدالتين الذاتيتين $X_m^*(x)$, $X_n(x)$ بالوزن $\rho(x)$.

ونثبت الآن أن كل قيمة ذاتية يناظرها بدقة أقصاها معامل ثابت دالة ذاتية واحدة فقط **. فبالفعل كل دالة ذاتية تتحدد تحديداً أحادى القيمة كحل للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية بقيمة الدالة نفسها ومشتقتها الأولى عند $x=0$. وبافتراض وجود الدالتين \bar{X} , \bar{X} تناظران نفس القيمة λ وتؤولان إلى الصفر عندما $x=0$. ثم يأخذ الدالة

$$X^*(x) = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(l)} \bar{X}(x),$$

للمشتقتان X_m' , X_n' متصلتان في كل نقطة من الفترة المغلقة $0 \leq x \leq l$ بما في ذلك النقطتان $x=0$ و $x=l$ وذلك لأن المعادلة (87) تغطى

$$h(x) X_m'(x) = \int_x^{x_0} (q - \lambda_m \rho) X_m dx + C.$$

ومن هنا ينتج وجود المشتقة X_m' عند $x=0$ و $x=l$.

•• إن الخاصية التى يتم اثباتها للمسألة الحدية الأولى مؤسسة على أن الحلين المستقلين خطياً للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية لا يمكن أن يؤولا إلى الصفر في نفس النقطة الواحدة. وهذا المنطوق يتعلق بالمسألة الحدية بالشروط الحدية الصفريّة. وبشروط حدية أخرى (على سبيل المثال $X(0) = X(l)$) يمكن أن توجد دالتان ذاتيتان مختلفتان تناظران قيمة ذاتية واحدة

$$\cdot (\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2, n = 1, 2, \dots \text{عندما } X_n^{(1)}(x) = \cos \frac{2\pi n}{l} x, \quad X_n^{(2)}(x) = \sin \frac{2\pi n}{l} x)$$

نرى ان هذه الدالة تحقق نفس المعادلة من الرتبة الثانية (87) ونفس الشروط الابتدائية التي تحققها الدالة $\bar{X}(x)$:

$$X^*(0) = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}''(0)} \bar{X}'(0) = 0,$$

$$\frac{dX^*}{dx}(0) = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}''(0)} \bar{X}''(0) = \bar{X}'(0).$$

وبذلك أثبتنا أن $X^*(x) = \bar{X}(x)$ وأن

$$\bar{X}(x) = A \bar{\bar{X}}(x) \left(A = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}''(0)} \right).$$

ونشير إلى أننا خلال عملية الإثبات استخدمنا الشرط $\bar{X}'(0) \neq 0$ الذى يتحقق حتماً لأن حل المعادلة الخطية (87) المحدد بالشطين الابتدائين

$$\bar{X}(0) = 0, \quad \bar{X}'(0) = 0,$$

يساوى الصفر بالتطابق ومن ثم فلا يمكن أن يكون دالة ذاتية (انظر صفحة ١٣٤).

ووفقاً لخطية وتجانس المعادلة والشروط الحدية من الواضح أنه إذا كانت الدالة $X_n(x)$ دالة ذاتية عند القيمة الذاتية λ_n فإن الدالة $A_n X_n(x)$ ثابت اختياري تعتبر أيضاً دالة ذاتية لنفس λ_n . وقد أثبتنا أعلاه أن فئة الدوال الذاتية تنتهى عند ذلك تماماً . ومن الواضح أن الدوال الذاتية التى تختلف عن بعضها بمعامل لن نعتبرها مختلفة اختلافاً جوهرياً . ولتجنب عدم التحديد فى اختيار المعامل يمكن إخضاع الدوال الذاتية لمطلب «التوحيد» (normalization)

$$\|X_n\|^2 = \int_0^1 X_n^2(x) \rho(x) dx = 1.$$

وإذا لم تحقق دالة ما $\hat{X}_n(x)$ هذا المطلب فإنه يمكن «توحيدها» بضربها فى المعامل A_n :

$$A_n \hat{X}_n(x) = X_n(x), \quad A_n = \frac{1}{\|\hat{X}_n\|}.$$

وإذا أخضعنا الدوال الذاتية للمسألة (88) — (87) لشرط التوحيد ($\|X_n\| = 1$) فإنها تكون مجموعة متعامدة متوحدية

$$\int_0^1 X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

نتقل إلى إثبات الخاصية ٢ . نثبت أن $\lambda > 0$ عندما $q \geq 0$. نفرض أن $X_n(x)$ دالة ذاتية متوحدة (normed) تناظر القيمة الذاتية λ_n ومن ثم

$$L[X_n] = -\lambda_n \rho(x) X_n(x).$$

بضرب طرفي هذه المساوية في $X_n(x)$ والتكامل بالنسبة إلى x من 0 إلى 1 نحصل على :

$$\lambda_n \int_0^1 X_n^2(x) \rho(x) dx = - \int_0^1 X_n(x) L[X_n] dx$$

أو

$$\lambda_n = - \int_0^1 X_n \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dX_n}{dx} \right] dx + \int_0^1 q(x) X_n^2(x) dx,$$

وذلك لأن الدالة $X_n(x)$ يفترض أنها متوحدة . وبإجراء التكامل بالتجزئة والاستعانة بالشروط الحدية (88) نحصل على :

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -X_n k X'_n \Big|_0^1 + \int_0^1 k(x) [X'_n(x)]^2 dx + \int_0^1 q(x) X_n^2(x) dx = \\ &= \int_0^1 k(x) [X'_n(x)]^2 dx + \int_0^1 q(x) X_n^2(x) dx, \quad (93) \end{aligned}$$

ومن هنا يتبع أن

$$\lambda_n > 0,$$

لأن لدينا من الشرط $k(x) > 0$ و $q(x) \geq 0$.

وبترك إثبات نظرية القابلية للتحليل جانبًا نتوقف باختصار عند حساب معاملات التحليل .

ليس من الصعب ملاحظة أن

$$F_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^1 \rho(x) F(x) X_n(x) dx. \quad (94)$$

بالفعل ، بضرب طرفي المساوية

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x)$$

في $p(x)X_n(x)$ وإجراء التكامل بالنسبة إلى x من 0 إلى l مع الأخذ في الاعتبار تعامد الدوال الذاتية نحصل على الصيغة المكتوبة أعلاه للمعاملات F_n (معاملات فورييه) * .

ونعود الآن إلى المعادلة التفاضلية الجزئية . للدالة $T(t)$ لدينا المعادلة

$$T'' + \lambda_n T = 0 \quad (95)$$

بدون أية شروط إضافية . ووفقاً لكون λ_n موجبة كما أثبتنا أعلاه يكون حل هذه المعادلة على الصورة :

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t,$$

حيث A_n , B_n معاملان غير محددین . وبذلك يكون للمسألة المساعدة فئة لانهاية من الحلول على الصورة

$$u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x).$$

ونتقل إلى حل المسألة بالشروط الابتدائية المعطاة . سنبحث عن الحل في الصورة

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x). \quad (96)$$

والشكل الصوري لتحقيق الشروط الابتدائية (86) يؤسس على نظرية القابلية للتحليل ٤ ويجرى تماماً كما هو في حالة الوتر المتجانس . ومن المتساويتين

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x)$$

نجد أن

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad (97)$$

* . نتج إمكانية إجراء التكامل حداً حداً للمتسلسلة من نظرية ستيفنسون عن التقارب المنتظم للمتسلسلة . (90)

حيث ψ_n , φ_n معاملات فورييه للدالتين $\psi(x)$, $\varphi(x)$ عند التحليل بمجموعة الدوال المتعامدة $\{X_n(x)\}$ بالوزن $\rho(x)$.

وبالاكتفاء بالشكل العام لطريقة فصل المتغيرات لن نورد شروط قابلية هذه الطريقة للتطبيق سواء المتعلقة منها بمعاملات المعادلة أو بالدوال الابتدائية .

ويعود الفضل في تأليف الأبحاث الأساسية الأولى لتبرير هذه الطريقة إلى ف. ستيكلوف ، وقد نشرت في عام ١٨٩٦ وفي عام ١٩٢٢ .

مسائل :

١ - عين الدالة $u(x, t)$ التي تحدد عملية ذبذبة الوتر $(0, l)$ المثبت عند طرفيه المثار (شكل ٢٤) بشد الوتر عند النقطة $x = c$ بمقدار h أى أن $u(c, 0) = h$ (انظر الملحق ١) . والسرعة الابتدائية تساوى الصفر .

٢ - وتر مثبت الطرفين يشد من النقطة $x = c$ بالقوة F_0 . عين ذبذبة الوتر إذا علم أن القوة في اللحظة الابتدائية تتوقف عن التأثير وأن السرعة الابتدائية تساوى صفراً .



شكل ٢٤

٣ - عين الدالة $u(x, t)$ التي تحدد عملية ذبذبة الوتر $(0, l)$ المثبت الطرفين المثار بالدفع K الموزع على الجزء $(c - \delta, c + \delta)$: (أ) بانتظام - (ب) وفقاً للقانون $\sigma_0 \cos \frac{x-c}{2\delta}$ (انظر الملحق ١) إذا كان الانحراف الابتدائي يساوى صفراً .

٤ - عين الدالة $u(x, t)$ التي تحدد عملية ذبذبة الوتر $(0, l)$ المثبت الطرفين المثار بالدفع K المؤثر عند النقطة $x = c$ (انظر الملحق ١) . الانحراف الابتدائي يساوى صفراً .

٥ - اثبت الخاصية الجمعية (additivity) لطاقة التوافقيات المنفردة لعملية الذبذبات بالشروط الحدية $u = 0, u_x = 0$. ادرس أيضاً الشرط الحدى من النوع الثالث $u_x + hu = 0$ (افرض أن كل المتسلسلات مستظمة التقارب) . احسب طاقة التوافقيات المنفردة في المسائل ١ - ٢ - ٣ - ٤ .

٦ - زنبرك مثبت عند أحد طرفيه عند النقطة $x = 0$ يشد بثقل كتلته M معلق عند النقطة $x = l$. عين ذبذبات الزنبرك إذا كان الثقل في اللحظة $t = 0$ يسقط ولا يؤثر بعد ذلك عند الطرف $x = l$ أية قوى على الإطلاق .

٧ - قضيب مثبت عند أحد طرفيه وعند الطرف الثانى تؤثر القوة F_0 . عين ذبذبات القضيب إذا علم أن القوة تتوقف عن التأثير في اللحظة الابتدائية .

٨- عين عملية ذبذبة زنبرك مثبت عند أحد طرفيه وفي الطرف الآخر علق في اللحظة الابتدائية ثقل كتلته M . الشروط الابتدائية صفرية .

٩- ثبتت كتلة M عند النقطة $x = c$ على وتر مثبت الطرفين $x = 0$. $x = l$. عين انحراف الوتر $u(x, t)$ إذا كان : (أ) في اللحظة الابتدائية شد الوتر عند النقطة $x = c$ بمقدار h عن وضع الاتزان ثم ترك دون اكتساب سرعة ابتدائية ، (ب) الانحراف الابتدائي والسرعة الابتدائية يساويان الصفر (انظر للملحق ٣) .

١٠- عين عملية ذبذبة زنبرك حر الطرفين إذا كان الشد الابتدائي منتظما (ضع نموذجاً لهذه المسألة) .

١١- عين عملية ذبذبة زنبرك مثبت الطرفين بمرونة إذا كانت معاملات الكزازة (الصلابة) واحدة والشروط الابتدائية اختيارية .

ابحث الحل عند قيم h الصغيرة (تثبيت «لين») وعند قيم h الكبيرة (تثبيت «صلب») واحسب الفروق المناظرة للقيم الذاتية للوتر الحر الطرفين والوتر المثبت الطرفين .

١٢- عين الانحراف $u(x, t)$ للوتر المثبت الطرفين بصلابة إذا كانت الذبذبات تحدث في وسط مقاومته تتناسب مع السرعة ، والشروط الابتدائية اختيارية .

١٣- سلك كهربائي موزول طوله l بالمميزات $l, R, C, G = 0$ مشحون حتى جهد معين ثابت v_0 . وفي اللحظة الابتدائية يوصل أحد طرفي السلك بالأرض ويبقى الطرف الثاني طول الوقت معزولاً . عين توزيع الجهد في السلك .

١٤- يتذبذب وتر مثبت الطرفين تحت تأثير قوة توافقية موزعة بالكثافة $f(x, t) = \Phi(x)\sin \omega t$. عين الانحراف $u(x, t)$ للوتر بشروط ابتدائية اختيارية . ابحث امكانية حدوث الرنين وعين الحل في حالة الرنين .

١٥- حل المسألة ١٤ بافتراض أن الذبذبة تحدث في وسط تتناسب مقاومته مع السرعة . عين الذبذبات المستقرة المكونة للجزء الأساسي من الحل عندما $t \rightarrow \infty$.

١٦- قضيب مرن طوله l وضع رأسياً وثبت بصلابة عند طرفه العلوى بمحصد يسقط سقوطاً حراً وعندما تصل سرعته إلى السرعة v_0 يتوقف فوراً . عين ذبذبة القضيب بافتراض أن الطرف الأسفل للقضيب يكون حراً .

١٧- حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - b^2 u + A$$

بالشروط الابتدائية الصفرية والشروط الحدية

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = B$$

حيث B, A, b ثوابت .

١٨- حل المعادلة التفاضلية

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + A \sinh x$$

بشروط ابتدائية صفرية والشروط الحدية :

$$u(0, t) = B, \quad u(l, t) = C,$$

حيث A, B, C ثوابت .

١٩ - على الوتر المتجانس المثبت الطرفين $x = l$. $x = 0$ بصلابة اثرت عند النقطة $x = c$ القوة التوافقية ($0 < c < l$)

$$F(t) = P_0 \sin \omega t,$$

التي تؤثر ابتداء من اللحظة $t = 0$. عين انحراف الوتر $u(x, t)$ بافتراض الشروط الابتدائية صفرية .

٢٠ - حل مسألة الذبذبات لقضيب غير متجانس طوله l مثبت الطرفين بصلابة ومكون من قضيبين متجانسين متصلين عند النقطة $x = c$ ($0 < c < l$) إذا كان الانحراف الابتدائي على الصورة :

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{c} x & (0 \leq x \leq c \text{ عند}) \\ \frac{h}{l-c} (l-x) & (c \leq x \leq l \text{ عند}) \end{cases}$$

والسرعتان الابتدائيتان تساويان الصفر .

٢١ - عين الذبذبات المستقرة لزنبرك أحد طرفيه مثبت وعند الطرف الثاني تؤثر القوة :

$$F(t) = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t.$$

٢٢ - عين الذبذبات المستقرة لقضيب غير متجانس مكون من قضيبين متجانسين متصلين عند النقطة $x = c$ إذا كان أحد طرفي القضيب مثبتا والطرف الآخر يتحرك وفقا للقانون

$$u(l, t) = A \sin \omega t.$$

بند ٤ - المسائل بالمعطيات على المميزات

فقرة ١ : صياغة المسألة . ندرس عدة مسائل تعتبر تطويراً للمسألة الحدية الأولى لمعادلة ذبذبات الوتر . وللتبسيط سندرس الظواهر الناشئة بالقرب من أحد طرفي الوتر معتبرين الطرف الآخر مبتعداً إلى ما لا نهاية أى أننا نأخذ بمثابة المسألة الأصلية مسألة المستقيم نصف اللانهائى .

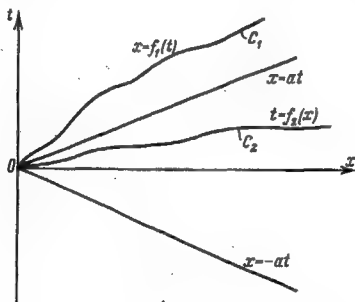
معادلة ذبذبات الوتر $u_{xx} = a^2 u_{tt}$ متماثلة بالنسبة للمتغيرين x , t إذا وضعنا $a^2 = 1$ أى غيرنا مقياس الزمن بإدراج متغير جديد $t = at'$. إلا أن الشروط الإضافية تدخل لا تماثلاً (asymmetry) فى التفسير الرياضى للمتغيرين x , t : فى الشروط الابتدائية (عندما $t = 0$) تعطى دالتان $u(x, 0)$, $u_t(x, 0)$ فى حين أنه فى الشروط الحدية (عند $x = 0$) تعطى دالة واحدة فقط $u(0, t)$.

وكما سبق ذكره في بند ٢ ، فقرة ٩ يوجد بين الدوال ومشتقاتها العمودية عند $t = 0$ ، $x = 0$ العلاقة :

$$u_t(0, z) + u_x(0, z) = u_t(z, 0) + u_x(z, 0) \quad (a^2 = 1)$$

لأى قيمة اختيارية z . ومن هنا ينتج أنه عند $t = 0$ و $x = 0$ لا يمكن إعطاء كل هذه الدوال بشكل مستقل عن بعضها البعض . فالشروط التي نعتز اختيارية هي فقط ثلاثة شروط مما يبين عدم إمكانية التعويض المتبادل في الشروط الإضافية .

والشروط الإضافية يمكن إعطاؤها إما على الخطوط المستقيمة $x = 0$ ، $t = 0$ (كنا نتعامل مع المسائل من هذا النوع حتى الآن) وإما على بعض المنحنيات في المستوى الطوري . فعلى سبيل المثال يمكن إعطاء القيم الحدية على منحنى ما $C_1(x = R_1(t))$ غير أنه لكي تكون هذه المسألة قابلة للحل يجب أن يكون المنحنى C_1 فضلاً عن ملاسته بشكل كاف ، محققاً أيضاً لبعض الشروط الإضافية الأخرى .



شكل ٢٥

ندرس عملية ذبذبات غاز في أنبوبة ذات حدود متحركة (بكباس متحرك) . من الواضح أن سرعة حركة الحدود التي تتحرك وفقاً للقانون $x = f_1(t)$ لا يمكن اعتبارها اختيارية : فهي يجب ألا تفوق سرعة الصوت a ($\frac{df_1(t)}{dt} < a$) . والنتيجة الهندسية لذلك هي أن المنحنى $C_1(x = f_1(t))$ يجب أن يكون مفصلاً

عن الخط $t = 0$ الذى يحمل القيم الابتدائية بالمميزة (شكل ٢٥) : ولو وقعت نقطة واحدة على الأقل من نقط المنحنى C_1 أسفل للميزة $x = at$ لكانت قيمة الدالة $u(x, t)$ مستحددة تماماً بالشروط الابتدائية ولما كان يمكن إعطاء هذه القيمة بشكل اختياري. ويرتبط المعنى الفيزيائى لذلك بأنه عند حركة الغاز بسرعات تفوق سرعة الصوت تفقد معادلة الصوتيات معناها وصحتها وينبغى عندئذ استخدام المعادلات اللاخطية لديناميكا الغازات*.

والشروط الابتدائية يمكن إعطاؤها ليس فقط على المحور $t = 0$ وإنما أيضاً على منحنى ما $(t = f_2(x))$ C_2 الذى يجب أن يحقق الشرط $|f_2'(x)| < 1/a$ (عند ذلك تقع C_2 فى مجال تأثير المعطيات الابتدائية). والمسائل على هذا النمط يسهل حلها بواسطة المعادلة التكاملية للذبذبات (انظر بند ٢ ، فقرة ٩).

وحيث إننا لا نهدف إعطاء قائمة كاملة لجميع المسائل الحدية الممكنة فسندرس بالتفصيل مسألة تعيين الحل بالمعطيات على الميزات. وهذه المسألة الحدية تسمى عادة بمسألة جورس. وتشكل المسألة بالمعطيات على الميزات أهمية كبيرة من وجهة نظر التطبيقات الفيزيائية. فهى تصادفنا مثلاً عند دراسة عمليات انتشار (sorption) ومج (desorption) الغازات (انظر ملحق ٥) وعمليات التجفيف (انظر المسألة ١) وكثير من المسائل الأخرى.

فقرة ٢ : طريقة التقريبات المتتالية لمسألة جورس. ندرس المسألة المبسطة التالية بالمعطيات على الميزات :

$$\left. \begin{aligned} u_{xy} &= f(x, y), \\ u(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ u(0, y) &= \varphi_2(y). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

والشروط الإضافية معطاة على المستقيمين $x = 0$ و $y = 0$ اللذين يعتبران مميزتين للمعادلة (1). سنفرض أن الدالتين $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ قابلتان للتفاضل وتحققان شرط التوافق $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. بإجراء التكامل بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y

* انظر الملحق ٤ .

على التالى للمعادلة (1) نحصل على :

$$u_y(x, y) = u_y(0, y) + \int_0^x f(\xi, y) d\xi,$$

$$u(x, y) = u(x, 0) + u(0, y) - u(0, 0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

أو

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2)$$

وبذلك فالمعادلة المبسطة التى لا تحتوى على المشتقات الأولى u_x, u_y والدالة المجهولة يتم التعبير عن الحل فى صورة تحليلية صريحة (2). ومن العلاقة (2) ينتج مباشرة وجود حل للمسألة المصاغة ووحدايته.

ننتقل لحل المعادلة الخطية من النمط الزائدى

$$u_{xy} = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u + f(x, y) \quad (3)$$

بالشروط الإضافية التالية على للميزتين $x = 0, y = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ u(0, y) &= \varphi_2(y), \end{aligned} \quad (3')$$

حيث $\varphi_1(x), \varphi_2(y)$ تحققان شروط القابلية للتفاضل والتوافق. وسنفترض أن المعاملات a, b, c دوال متصلة فى المتغيرين x, y .

وتبين العلاقة (3) أن الدالة $u(x, y)$ تحقق المعادلة التكاملية التفاضلية :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta)u_\xi + b(\xi, \eta)u_\eta + c(\xi, \eta)u] d\xi d\eta + \\ &+ \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (4)$$

ولحلها نستخدم طريقة التقريبات المتتالية. نختار بمثابة التقريب الصفري الدالة :

$$u_0(x, y) = 0.$$

وعندئذ تعطى المعادلة (4) الصيغة التالية للتقريبات المتتالية :

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, y) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ &\dots \dots \dots \\ u_n(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + \right. \\ &\quad \left. + b(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) u_{n-1} \right] d\xi d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ونشير إلى أن

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \int_0^y \left[a(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta) u_{n-1} \right] d\eta, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \int_0^x \left[a(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y) u_{n-1} \right] d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

نثبت التقارب المنتظم للمتتابعات

$$\{u_n(x, y)\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right\}.$$

ولهذا الغرض ندرس الفروق

$$\begin{aligned} z_n(x, y) &= u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y) = \\ &= \int_0^y \int_0^x \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) z_{n-1}(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta, \\ \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x} = \\ &= \int_0^y \left[a(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta) z_{n-1}(x, \eta) \right] d\eta, \\ \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y} = \\ &= \int_0^x \left[a(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y) z_{n-1}(\xi, y) \right] d\xi. \end{aligned}$$

نفرض أن M هي الحد العلوى للقيم المطلقة للمعاملات $a(x, y)$ و $b(x, y)$ و $c(x, y)$ وأن H هي الحد العلوى للقيم المطلقة للدالة $z_0 = u_1(x, y)$ ومشتقاتها

$$|z_0| < H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial x} \right| < H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial y} \right| < H$$

عند تغير x, y داخل مربع ما $(0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L)$. نكون التقديرات الحدية العظمى للدوال $z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}$ من الواضح أن

$$|z_1| < 3HMxy < 3HM \frac{(x+y)^2}{2!},$$

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| < 3HMy < 3HM(x+y),$$

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| < 3HMx < 3HM(x+y).$$

نفرض أنه تتحقق التقديرات الدائرة (recurring) التالية :

$$|z_n| < 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| < 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!},$$

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| < 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!},$$

حيث $K > 0$ عدد ثابت ما سنحدد قيمته فيما بعد. وبلاستعانة بهذه التقديرات والعلاقة للتقريب $(n+1)$ نحصل بعد عدة اختصارات تقوى المتباينة على :

$$|z_{n+1}| < 3HM^{n+1} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} \left(\frac{x+y}{n+2} + 2 \right) < 3HM^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!},$$

$$\left| \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x} \right| < 3HM^{n+1} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{x+y}{n+2} + 2 \right) < 3HM^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left| \frac{\partial z_{n+1}}{\partial y} \right| < 3HM^{n+1} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{x+y}{n+2} + 2 \right) < 3HM^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},$$

حيث

$$K = L + 2.$$

وفي الأطراف اليمنى لهذه المتباينات توجد بدقة حتى معاملات ثابتة الحدود العامة لمفكوك e^{2KLM} . وهذه التقديرات تبين أن متابعة الدوال

$$\begin{aligned}u_n &= u_0 + z_1 + \dots + z_{n-1}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\end{aligned}$$

تتقارب تقارباً منتظماً إلى النهايات الدوال التي سنرمز لها كما يلي :

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y), \\ v(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y), \\ w(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y).\end{aligned}$$

وبالانتقال إلى النهاية تحت علامة التكامل في العلاقات (6), (5) سنحصل على :

$$\left. \begin{aligned}u(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta) v + b(\xi, \eta) w + c(\xi, \eta) u] d\xi d\eta, \\ v(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + \int_0^y [a(x, \eta) v + b(x, \eta) w + c(x, \eta) u] d\eta, \\ w(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) + \int_0^x [a(\xi, y) v + b(\xi, y) w + c(\xi, y) u] d\xi.\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

والمساويتان الناتجتان من هنا

$$\begin{aligned}v &= u_x, \\ w &= u_y\end{aligned}$$

تكفلان التأكد من أن الدالة $u(x, y)$ تحقق المعادلة التكاملية التفاضلية

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ &+ \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta) u_\xi + b(\xi, \eta) u_\eta + c(\xi, \eta) u] d\xi d\eta, \quad (4)\end{aligned}$$

وكذلك تحقق المعادلة التفاضلية الأصلية (3) وذلك يتم التأكد منه مباشرة بتفاضل (4) بالنسبة إلى x, y . والدالة $u = u(x, y)$ تحقق أيضاً الشروط الإضافية كما يسهل التأكد من ذلك.

نثبت الآن وحدانية حل المسألة المدروسة (3')-(3). بفرض وجود حلين $u_1(x, y), u_2(x, y)$ نحصل فوراً للفرق بينهما

$$U(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

على المعادلة التكاملية التفاضلية :

$$U(x, y) = \int_0^y \int_0^x (aU_x + bU_y + cU) dx dy.$$

نرمز بالرمز H_1 إلى الحد العلوى للقيم المطلقة :

$$|U(x, y)| < H_1, |U_x(x, y)| < H_1, |U_y(x, y)| < H_1$$

عندما $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L$. وتكرار التقديرات المجراة للدوال $z_n(x, y)$ نتأكد من صحة المتباينة :

$$|U| < 3H_1 M^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H_1}{K^n M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}$$

لأية قيمة للعدد n . ومن هنا يتبع أن

$$u_1(x, y) = u_2(x, y) \text{ أو } U(x, y) = 0$$

مما يثبت وحدانية حل المسألة بالمعطيات على الميزات.

وإذا كانت المعاملات a, b, c ثابتة فإن المعادلة (3) بواسطة التعويض

$$u = ve^{\lambda x + \mu y}$$

تؤول إلى الصورة

$$v_{xx} + C_1 v = f. \quad (8)$$

وعند $C_1 = 0$ نحصل على المسألة للمعادلة للبسطة (1) التي يعطى حلها بالعلاقة (2).

وإذا كان $C_1 \neq 0$ فإن حل المسألة للمعادلة (8) يمكن أيضاً الحصول عليه في صورة تحليلية صريحة بالطريقة المشروحة في بند ٥ .

مسائل :

١ - يدفع الهواء (بسرعة v) في أنبوبة ($x > 0$) مملوءة بمادة تحتوي على رطوبة (moisture) . نفرض أن $v(x, t)$ هي تركيز الرطوبة في المادة الممتصة . $u(x, t)$ تركيز الأبخرة الحرة . استنبط معادلة للدالتين $u(x, t)$. $v(x, t)$. نصف عملية التجفيف إذا كان : (١) لعملية "يزوترمية" (isothermal) . (٢) "يزوثرم التجفيف" (خط ثبات درجة الحرارة) على الصورة $v = u$ حيث v ثابت لايزوترمية (انظر أيضاً الملحق ٥) .

٢ - يرماء سخان بسرعة v في أنبوبة ($x > 0$) . نفرض أن u هي درجة حرارة للماء في الأنبوبة و v هي درجة حرارة جدران الأنبوبة . و u هي درجة حرارة الوسط المحيط . استنبط للمعادلات للدالتين u . v . ياھمال توزيع درجة الحرارة في مقطع الأنبوبة والجدران ومعتبراً أنه يوجد على حدود الماء - الجدار والجدار - الوسط المحيط هبوط وصعود في درجات الحرارة ومحدث تبادل حرارى وفقاً لقانون نيوتن (انظر الباب الثالث . بند ١) .

بند ٥ - حل المعادلات الخطية العامة من النمط الزائدى

فقرة ١ : المؤثرات التفاضلية المترافقة . نثبت بعض العلاقات المساعدة التي تلزمننا للتعبير عن حلول المسائل الحدية في الصورة التكاملية . نفرض أن

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u \quad (1)$$

($a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ دوال قابلة للتفاضل)

هو مؤثر تفاضلى خطى مناظر للمعادلة الخطية من النمط الزائدى . بضرب $\mathcal{L}[u]$ في دالة ما v نكتب الحدود على انفراد في الصورة

$$\begin{aligned} vu_{xx} &= (vu_x)_x - (v_x u)_x + uv_{xx}, & vbu_y &= (bv u)_y - u(bv)_y, \\ vu_{yy} &= (vu_y)_y - (v_y u)_y + uv_{yy}, & vcu &= ucv, \\ vau_x &= (av u)_x - u(av)_x, \end{aligned}$$

وبتجميع الحدود المنفردة هذه نحصل على :

$$v\mathcal{L}[u] = u\mathcal{K}[v] + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}, \quad (2)$$

حيث

$$\mathcal{M}(\dot{v}) = v_{xx} - v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv, \quad (3)$$

$$H = vu_x - v_x u + avu = (vu)_x - (2v_x - av)u = \quad (4)$$

$$= -(vu)_x + (2u_x + au)v, \quad (4')$$

$$K = -vu_y + v_y u + bvu = -(vu)_y + (2v_y + bv)u = \quad (5)$$

$$= (uv)_y - (2u_y - bu)v. \quad (5')$$

والمؤثران التفاضليان يسميان مترافقين إذا كان الفرق

$$v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]$$

مجموعا للمشتقات الجزئية بالنسبة إلى x, y لصيغتين H, K .

والمؤثران اللذان ندرسهما الآن \mathcal{M}, \mathcal{L} من الواضح أنها مترافقان.

وإذا كان $\mathcal{L}[u] = \mathcal{M}[u]$ فإن المؤثر $\mathcal{L}[u]$ يسمى بالمؤثر ذاتي الترافق (self-conjugate).

والتكامل الثنائي للفرق $v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]$ على منطقة ما G محدودة بمنحنى متقطع الملوثة C يساوى

$$\int_G \int_G (v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]) d\xi d\eta = \int_C (H d\eta - K d\xi), \quad (6)$$

حيث u, v دالتان اختياريتان قابلتان للتفاضل مرتين (علاقة جرين الثنائية الأبعاد أى فى المستوى)*.

فقرة ٢ : الصورة التكاملية للحل . نستعين بالعلاقة (6) لحل المسألة التالية :

عين حل المعادلة الخطية من النمط الزائدى

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = -f(x, y), \quad (7)$$

الذى يحقق الشروط الابتدائية على المنحنى C

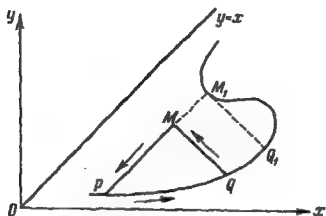
$$\begin{aligned} u|_C &= \varphi(x), \\ u_n|_C &= \psi(x) \end{aligned} \quad (7')$$

نظر كتاب يسكونوف «التفاضل والتكامل» الجزء الثانى طبعة دار «مير» باللغة العربية .

(«₁₁ » المشتقة في اتجاه العمودى على المنحنى C) ووضح تلك المنطقة التي يتحدد فيها الحل بالشروط (7').

المنحنى C معطى عند ذلك بالمعادلة

$$y = f(x),$$



شكل ٢٦

حيث $f(x)$ دالة قابلة للتفاضل . نضع على المنحنى C شرط ألا يقطعه أكثر من مرة واحدة مستقيم مميز من العائلتين $y-x = \text{const}$ و $y+x = \text{const}$.
(لهذا الغرض يجب أن يكون $|f'(x)| < 1$) . والعلاقة (6) للمثلث المنحنى MPQ المحدود بالقوس PQ من المنحنى C ، وجزئى المميزتين MP ، MQ (شكل ٢٦) تعطى :

$$\begin{aligned} \int_{MPQ} \int (v \mathcal{L}[u] - u \mathcal{M}[v]) d\xi d\eta = \\ = \int_0^M (H d\eta - K d\xi) + \int_M^P (H d\eta - K d\xi) + \int_P^Q (H d\eta - K d\xi). \end{aligned}$$

نحول التكاملين الأول والثانى المأخوذين على الميزتين MP ، MQ . فبالأخذ في الاعتبار أن

$$\left(\begin{array}{l} ds \text{ عنصر طول القوس} \\ \text{على امتدادى } MP, MQ \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{على } QM \quad d\xi = -d\eta = -\frac{ds}{\sqrt{2}} \\ \text{على } MP \quad d\xi = d\eta = +\frac{ds}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

والاستعانة بالعلاقتين (5) . (4) نحصل على :

$$\begin{aligned} \int_Q^M (H d\eta - K d\xi) &= - \int_Q^M d(uv) + \int_Q^M \left(2 \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}} v \right) u ds = \\ &= -(uv)_M + (uv)_Q + \int_Q^M \left(2 \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}} v \right) u ds \end{aligned}$$

وبالمثل

$$\int_M^P (H d\eta - K d\xi) = -(uv)_M + (uv)_P + \int_P^M \left(2 \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{\sqrt{2}} v \right) u ds.$$

ومن هنا ومن العلاقة (6) يتبع أن

$$\begin{aligned} (uv)_M &= \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \int_P^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{2\sqrt{2}} v \right) u ds + \int_Q^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}} v \right) u ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_P^M (H d\eta - K d\xi) - \frac{1}{2} \int_{MPQ} (v \mathcal{L}[u] - u \mathcal{K}[v]) d\xi d\eta. \quad (8) \end{aligned}$$

وهذه العلاقة تعتبر متطابقة صحيحة لأي دالتين u . v . مساوين بدرجة كافية .

نفرض أن u حل المسألة المصاغة أعلاه بالشروط الابتدائية المذكورة ، والدالة v تعتمد على النقطة M كبارامتر ونحقق الشروط (المطالب) التالية :

$$\Delta MPQ \text{ داخل } \mathcal{K}[v] = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - (av)_{\xi} - (bv)_{\eta} + cv = 0 \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \cdot \quad MP \text{ على الميزة } \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{b-a}{2\sqrt{2}} v \\ \cdot \quad MQ \text{ على الميزة } \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{b+a}{2\sqrt{2}} v \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

$$v(M) = 1.$$

ومن الشروط على المميزات والشروط الأخير نجد أن :

$$\cdot \quad MP \text{ على } v = e^{\int_a^s \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds}$$

$$MQ \text{ على } v = e^{\int_0^s \frac{b+a}{2V^2} ds}$$

حيث s_0 قيمة s في النقطة M . وكما رأينا في البند ٤ فإن المعادلة (9) وقيم الدالة v على الميزتين MP و MQ تحدد هذه الدالة تمامًا في المنطقة MPQ . وتسمى الدالة v عادة بدالة ريمان.

وبذلك فالعلاقة (8) للدالة التي تحقق المعادلة (7) تأخذ الصورة النهائية التالية :

$$u(M) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q [v(u_\xi d\eta + u_\eta d\xi) - u(v_\xi d\eta + v_\eta d\xi) + uv(a d\eta - b d\xi)] + \frac{1}{2} \iint_{MPQ} v(M, M') f(M') d\sigma_{M'} (d\sigma_{M'} = d\xi d\eta). \quad (10)$$

وهذه العلاقة تحل المسألة المطروحة لأن الصيغة تحت علامة التكامل المأخوذ على امتداد PQ تحتوي على دوال معلومة على القوس C . بالفعل عرفت الدالة v كما سبق ذكره أعلاه أما الدوال

$$u|_C = \varphi(x),$$

$$u_x|_C = u_s \cos(x, s) + u_n \cos(x, n) = \frac{\varphi'(x) - \psi(x) f'(x)}{V'1 + (f'(x))^2}$$

$$u_y|_C = u_s \cos(y, s) + u_n \cos(y, n) = \frac{\varphi'(x) f'(x) + \psi(x)}{V'1 + (f'(x))^2}$$

فتحسب بواسطة المعطيات الابتدائية.

وتبين العلاقة (10) أنه إذا علمت المعطيات الابتدائية على القوس PQ فإنها تحدد تمامًا الدالة في المثلث المميز PMQ Δ إذا كانت الدالة $f(x, y)$ معلومة في هذه المنطقة.*

إذا كانت القلمية تقطع المنحنى C في نقطتين M_1 و P (انظر شكل ٢٦) فإن قيمة $u(M_1)$ لا يمكن إعطاؤها اختيارياً وإنما تتحدد بالعلاقة (10) بشروط ابتدائية على القوس PQ . وقيم الدالة $f(x, y)$ في ΔPM_1Q_1 .

والعلاقة (10) الناتجة بافتراض وجود الحل تحدد الحل بدلالة المعطيات الابتدائية والطرف الأيمن للمعادلة (7) وبذلك فإنها تثبت من حيث الجوهر وحدانية الحل (قارن بعلاقة دالمبرت ، الباب الثاني ، بند ٢ ، ص ٥٨) .
ويمكن أن نوضح أن الدالة u المحددة بالعلاقة (10) تحقق شروط المسألة (7') - (7) . غير أننا لن نتوقف عند هذا الإثبات .

فقرة ٣ : التفسير الفيزيائي لدالة ريمان . نوضح المعنى الفيزيائي للدالة $v(M, M')$. ولهذا الغرض نعين حل للمعادلة غير المتجانسة

$$\mathcal{L}[u] = -2f_1 \quad (f = 2f_1)$$

بشروط ابتدائية صفرية على المنحنى C . وبالدخول إلى العلاقة (10) نرى أن الحل المطلوب يكون على الصورة

$$u(M) = \iint_{MPQ} v(M, M') f_1(M') d\sigma_{M'} \quad (11)$$

نفرض أن $f_1(M)$ هي الدالة المحلية (local function) للنقطة M_1 التي تساوى الصفر في كل مكان باستثناء جوار صغير S_ε للنقطة M_1 وتحقق شرط التوحيد

$$\iint_{S_\varepsilon} f_1(M') d\sigma_{M'} = 1. \quad (12)$$

والعلاقة (11) في هذه الحالة تأخذ الصورة

$$u_\varepsilon(M) = \iint_{S_\varepsilon} v(M, M') f_1(M') d\sigma_{M'} \quad (13)$$

وبالاستعانة بنظرية القيمة المتوسطة يمكننا كتابة

$$u_\varepsilon(M) = v(M, M_1) \iint_{S_\varepsilon} f_1(M') d\sigma_{M'} = v(M, M_1),$$

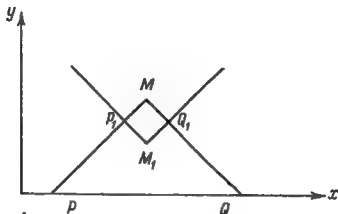
حيث M_1^* نقطة ما من نقاط المنطقة (الجوار) S_ε .

وبتطبيق ε - الجوار S_ε إلى نقطة $M_1(\varepsilon \rightarrow 0)$ نجد أن :

$$u(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(M) = v(M, M_1). \quad (14)$$

والدالة f_1 كما رأينا في عدة أمثلة تعتبر عادة كثافة القوة والمتغير y يعتبر الزمن .
والصيغة

$$\int_{S_g} \int f_1(M') d\sigma_{M'} = \int_{S_g} \int f_1(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (15)$$



شكل ٢٧

هي عبارة عن دفع القوة . ومن هنا ووفقاً للعلاقة (11) نستنتج أن $v(M, M_1)$ هي عبارة عن دالة تأثير وحدة الدفع المؤثرة في النقطة M_1 . والدالة $v(M, M_1) = v(x, y; \xi, \eta)$ كانت معرفة على أساس أنها دالة في البارامترات $M(x, y)$ تحقق بالإحداثيين ξ, η للنقطة M_1 المعادلة

$$\mathcal{M}(\xi, \eta)[v] = 0 \quad (16)$$

بالشروط الإضافية (9a) .

ندرس الدالة

$$u = u(M, M_1),$$

التي تعتبر دالة في البارامترات $M_1(\xi, \eta)$ تحقق بالإحداثيين x, y للنقطة M المعادلة

$$\mathcal{P}(x, y)[u] = 0 \quad (17)$$

بالشروط الإضافية (انظر شكل ٢٧)

$$\left. \begin{aligned} & \text{على الميزة } M_1 Q_1 \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{b-a}{2\sqrt{2}} u \\ & \text{على الميزة } M_1 P_1 \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{b+a}{2\sqrt{2}} u \\ & u(M_1, M_1) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ومن هذين الشرطين نجد أن

$$u(M, M_1)^* = \begin{cases} \int_{e^{a_1}}^s \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds & (\text{على } M_1Q_1) \\ \int_{e^{a_2}}^s \frac{b+a}{2\sqrt{2}} ds & (\text{على } M_1P_1) \end{cases} \quad (19)$$

$$u(M_1, M_1) = 1.$$

والمعادلة (17) والشرطان (18) تحدد الدالة u تمامًا في الشكل الرابعي $MP_1M_1Q_1$ المحدود بأجزاء المميزتين $MP_1, MQ_1, M_1P_1, M_1Q_1$.

وبتطبيق العلاقة (6) على الشكل الرابعي $MP_1M_1Q_1$ نحصل على :

$$\iint_{MP_1M_1Q_1} (v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]) d\xi d\eta = \int_M^{P_1} (H d\eta - K d\xi) + \int_{Q_1}^M + \int_{M_1}^{Q_1} + \int_{P_1}^{M_1} = 0$$

($R(\xi, \eta)$ نقطة التكامل للمتغيرة في $MP_1M_1Q_1$). وبلاستعانة بالعلاقين (4) ، (5) للصيغتين H و K والشروط (9a) على للميزات للدالة v يسهل حساب التكاملين الأول والثاني في الطرف الأيمن

$$\int_M^{P_1} (H d\eta - K d\xi) = -(uv)_M + (uv)_{P_1},$$

$$\int_{Q_1}^M (H d\eta - K d\xi) = -(uv)_M + (uv)_{Q_1},$$

كما فعلنا عند استنباط العلاقة (10) .

وبالمثل ، بالاستعانة بالمتساويتين (5') ، (4') والشروط (19) للدالة $u(M, M_1)$ على الميزات نحصل على :

$$\int_{P_1}^{M_1} (H d\eta - K d\xi) =$$

$$= \int_{P_1}^{M_1} [-(vu)_\xi d\eta - (uv)_\eta d\xi] + \int_{P_1}^{M_1} v [(2u_\xi d\eta + 2u_\eta d\xi) + (au d\eta - bu d\xi)] =$$

$$= \int_{P_1}^{M_1} d(uv) + \int_{P_1}^{M_1} 2 \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}} u \right) v ds = (uv)_{M_1} - (uv)_{P_1},$$

$$\left(d\xi = -d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\int_{M_1}^{Q_1} (H d\eta - K d\xi) = (uv)_{M_1} - (uv)_{Q_1}, \quad \left(d\xi = d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}} \right).$$

ويتجمع كل هذه المتساويات الأربع نحصل على :

$$2(uv)_M = 2(uv)_{M_1} \quad \text{أو}$$

$$u(M, M_1) = v(M, M_1), \quad (20)$$

وذلك لأن

$$(u)_{M_1} = (v)_M = 1.$$

وبذلك نرى أن دالة تأثير وحدة الدفع المركز في النقطة M_1 يمكن تعيينها كحل للمعادلة

$$\mathcal{L}(x, y)[v(M, M_1)] = 0, \quad M = M(x, y), \quad M_1 = M_1(\xi, \eta)$$

بالشروط الإضافية (18).

فقرة ٤ : المعادلات ذات المعاملات الثابتة . ندرس بمثابة المثال الأول على تطبيق العلاقة (10) المسألة بالمعطيات الابتدائية لمعادلة ذبذبات الوتر :

$$u_{yy} = u_{xx} + f_1(x, t) \quad \left(y = at, f_1 = \frac{f}{a^2} \right),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_y = \psi_1(x) \quad \left(\psi_1 = \frac{\Psi}{a} \right).$$

في العلاقة (10) القوس PQ هو عبارة عن جزء من المحور $y = 0$.
المؤثر

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}$$

ذاتي الترافق لأن

$$\mathcal{M}(u) = \mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}.$$

وحيث أن $a = 0$ ، $b = 0$ فإن الدالة v تساوى على المميزتين MP . MQ الواحد الصحيح . ومن هنا يتبع أن

$$v(M, M') = 1$$

لأى نقطة M' داخل المثلث PMQ .

وبعد ذلك فبالأخذ بعين الاعتبار أنه في حالتنا يكون

$$PQ \text{ على } d\eta = 0$$

نحصل على :

$$u(M) = \frac{u(P) + u(Q)}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q u_{\eta} d\xi + \frac{1}{2} \iint_{PMQ} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

وبملاحظة أن $P = P(x-y, 0)$, $Q = Q(x+y, 0)$ حيث x, y إحداثيا النقطة $M = M(x, y)$ والاستعانة بالشروط الابتدائية نجد أن :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \\ &= \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2} = \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \psi_1(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} f_1(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

وبالعودة إلى المتغيرين x, t نحصل على علاقة دالمبرت

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \\ &= \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

التي قابلناها قبل ذلك في فقرة ٩ ، بند ٢ (العلاقة (30)) .

ومماثلة المثال الثاني ندرس المسألة بالمعطيات الابتدائية للمعادلة ذات المعاملات الثابتة :

$$u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0, \quad -\infty < x < \infty, y > 0 \quad (21)$$

، (a , b , c أعداد ثابتة) ،

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad (22)$$

$$u_y|_{y=0} = \psi(x). \quad (23)$$

والتعويض

$$U = ue^{\lambda x + \mu y} \quad (24)$$

يكفل تحويل المعادلة (21) إلى صورة أبسط :

$$U_{xx} - U_{yy} + c_1 U = 0, \quad c_1 = \frac{1}{4}(4c^2 - a^2 - b^2), \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \quad (25)$$

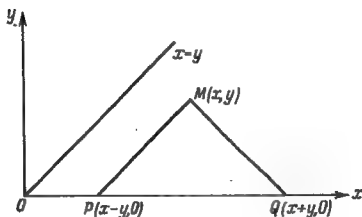
بالشروط الإضافية

$$U|_{y=0} = \varphi(x) e^{\frac{a}{2}x} = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (22')$$

$$U_y|_{y=0} = \left(\psi(x) - \frac{b}{2} \varphi(x) \right) e^{\frac{a}{2}x} = \psi_1(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (23')$$

وذلك إذا اخترنا البارامترين λ , μ بطريقة مناسبة ، بفرض

$$\lambda = \frac{a}{2}, \quad \mu = -\frac{b}{2}. \quad (26)$$



شكل ٢٨

ويؤول تعيين الدالة $U(x, y)$ بالمعطيات الابتدائية والمعادلة (25) إلى تكوين

دالة ريمان $v(x, y; \xi, \eta)$.

والدالة v يجب أن تحقق الشروط :

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = 0, \quad (27)$$

$$\left. \begin{array}{l} MP \text{ على الميزة } v=1 \\ MQ \text{ على الميزة } v=1 \end{array} \right\} \quad (28)$$

(شكل ٢٨)

ونبحث عن v في الصورة

$$v = v(z), \quad (29)$$

حيث

$$z^2 = (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 \quad \text{أو} \quad z = \sqrt{(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2} \quad (30)$$

وعلى الميزتين MP, MQ يؤول المتغير z إلى الصفر ومن ثم فإن $v(0) = 1$. وبعد ذلك فالطرف الأيسر للمعادلة (27) يتحول إلى ما يلي :

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = v''(z)(z_x^2 - z_y^2) + v'(z)(z_{xx} - z_{yy}) + c_1 v = 0.$$

وبتفاضل صيغة z^2 مرتين بالنسبة إلى x و y نحصل على :

$$\begin{aligned} z z_x &= x - \xi, \\ z z_y &= -(y - \eta), \\ z z_{xx} + z_x^2 &= 1, \\ z z_{yy} + z_y^2 &= -1. \end{aligned}$$

ومن هنا ومن العلاقة (30) نحصل على :

$$z_x^2 - z_y^2 = 1, \quad z_{xx} - z_{yy} = \frac{1}{z}.$$

وتأخذ المعادلة للدالة v الصورة التالية :

$$v'' + \frac{1}{z} v' + c_1 v = 0$$

بالشرط $v(0) = 1$. وحل هذه المعادلة هو دالة بيسال من الرتبة الصفرية (انظر الكتاب الثاني ، الباب الخامس ، القسم الأول ، بند ١)

$$v(z) = J_0(\sqrt{c_1} z)$$

أو

$$v(x, y; \xi, \eta) = J_0(\sqrt{c_1} [(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2]) \quad (31)$$

ونستعين الآن لتعيين $U(x, y)$ بالعلاقة (10) التي تأخذ في حالتنا الصورة التالية :

$$U(M) = \frac{U(P) + U(Q)}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q (vU_\eta d\xi - Uv_\eta d\xi) \quad (d\eta = 0). \quad (32)$$

وفي البداية نحسب التكامل المأخوذ على الجزء المستقيم PQ ($\eta=0$) :

$$\int_P^Q (vU_\eta - Uv_\eta) d\xi = \int_{x-y}^{x+y} \left\{ J_0(\sqrt{c_1}[(x-\xi)^2 - y^2]) U_\eta(\xi, 0) - \right. \\ \left. - \frac{U(\xi, 0) \sqrt{c_1} y J'_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2})}{\sqrt{c_1}[(x-\xi)^2 - y^2]} \right\} d\xi. \quad (33)$$

وبالاستعانة بالشروط الابتدائية (23'), (22') نحصل على :

$$U(x, y) = \frac{\varphi_1(x-y) + \varphi_1(x+y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) \psi_1(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{c_1} y \int_{x-y}^{x+y} \frac{J_1(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) \varphi_1(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}}, \quad (34)$$

ومن هنا ووفقاً للعلاقات (23') و (22') و (24) نحصل على العلاقة

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x-y) e^{-\frac{a-b}{2}y} + \varphi(x+y) e^{\frac{a+b}{2}y}}{2} - \\ - \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2}y} \int_{x-y}^{x+y} \left\{ \frac{b}{2} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) - \right. \\ \left. - \sqrt{c_1} y \frac{J_1(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \right\} e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)} \varphi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2}y} \int_{x-y}^{x+y} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)} \psi(\xi) d\xi, \quad (35)$$

التي تعطينا حل المسألة المطروحة.

ندرس الحالة الخاصة $a=0$, $b=0$ أى المعادلة

$$u_{xx} - y_{yy} + cu = 0.$$

من العلاقة (35) نحصل مباشرة على :

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} I_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) \psi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{c_1} y \int_{x-y}^{x+y} \frac{I_1(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \varphi(\xi) d\xi. \quad (36)$$

وبفرض $c_1 = 0$. $y = at$ في هذه العلاقة نصل إلى علاقة دالمبرت

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \bar{\psi}(\xi) d\xi, \quad (37)$$

التي تعطى حل معادلة ذبذبات الوتر

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

بالشروط الابتدائية

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \bar{\psi}(x),$$

$$\bar{\psi}(x) = a\psi(x) = au_y(y, 0).$$

مسائل على الباب الثاني

١ - حل المسألة ١ من بند ٤ بافترض أنه في اللحظة الابتدائية يكون تركيز الرطوبة ثابتاً على امتداد كل الأنبوية وفي مدخلها يعطى دفق من الهواء الجاف .

٢ - حل المسألة ٢ من بند ٤ معتبراً أن درجة الحرارة الابتدائية للمجموعة تساوى u_0 . ويحتفظ طول الوقت بدرجة الحرارة في نهاية الأنبوية مساوية v_0 (حيث $v_0 > u_0$).

٣ - حل مجموعة المعادلتين التلغرافيتين (انظر بند ١ - العلاقة (21)) :

$$I_x + C v_t + G v = 0,$$

$$v_x + L I_t + R I = 0$$

للخط الانتهالى بالشروط الابتدائية

$$I(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, 0) = \psi(x).$$

إرشاد : حول مجموعة المعادلتين (بند ١ - العلاقة (21)) إلى معادلة من الرتبة الثانية لإحدى الدالتين $i(x, t)$ أو $v(x, t)$. مثلاً

$$i_{xx} = GLi_{tt} + (CR + GL) i_t + GRI$$

بالشرط الابتدائية $i(x, 0) = \varphi(x)$.

$$\left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_{t=0} = - \left(\frac{1}{L} v_x + \frac{R}{L} i \right)_{t=0} = - \frac{1}{L} \psi'(x) - \frac{R}{L} \varphi(x) = \psi_0(x),$$

ثم استعن بعد ذلك بالعلاقة (35) .

٤ - ابحث حل المعادلة التفرافية الناتج (العلاقة (35)) لحالة R, G الصغيرين . ادرس الحالة النهائية $G \rightarrow 0, R \rightarrow 0$ واحصل من العلاقة (35) على علاقة دالبرت لحل معادلة ذبذبات الوتر .

ملاحق الباب الثاني

ملحق ١ - حول ذبذبة أوتار الآلات الموسيقية

إن الوتر المتذبذب يثير ذبذبة للهواء تتقبلها أذن الإنسان في صورة صوت صادر من الوتر . وتتميز قوة الصوت بطاقة أو سعة الذبذبات وتتميز النغمة بفترة دورة الذبذبات أما جرس الصوت فيتميز بالعلاقة بين طاقات النغمة الأساسية والنغمت المتوافقة . ودون أن نتوقف عند العمليات الفسيولوجية لتقبل الصوت وعند عملية انتقال الصوت في الهواء سنميز صوت الوتر بطاقته وفترة الدورة وتوزيع الطاقة على النغمت المتوافقة .

وفي الآلات الموسيقية تثار عادة الذبذبات المستعرضة للأوتار . وتنقسم الآلات الوترية إلى ثلاثة أنماط : الآلات العودية (pizzicato) والآلات النقرية (percussion) والآلات القوسية (bow) . وفي الآلات النقرية (البيانو مثلاً) تثار الذبذبة بصدمة (بنقرة) تكسب الوتر سرعة ابتدائية بدون انحراف ابتدائي ، أما في الآلات العودية (على سبيل المثال في القيثارة أو الهارب) فتثار الذبذبات بإكساب الوتر انحرافاً ابتدائياً معيناً بدون سرعة ابتدائية .

والذبذبات الحرة للوتر المثارة بأية طريقة يمكن التعبير عنها في الصورة (انظر الباب الثاني - بند ٣) :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right).$$

وبمثابة تمرين على بند ٣ اقترحنا حل المسألة ١ الموجودة في أساس النظرية المبسطة لإثارة أوتار الآلات العودية . ويوضح حل هذه المسألة أنه إذا كان الانحراف الابتدائي ممثلاً في صورة مثلث ارتفاعه h عند النقطة $x=c$ (شكل ٢٩) فإن

$$a_n = \frac{2hl^2}{\pi^2 n^2 c (l-c)} \sin \frac{\pi n c}{l}, \quad b_n = 0. \quad (1)$$

وطاقة التوافقية الـ n تساوى

$$E_n = \frac{1}{4} \rho l \omega_n^2 a_n^2 = M h^2 \frac{l^2 a^2}{\pi^2 n^2 c^2 (l-c)^2} \sin^2 \frac{\pi n c}{l} \quad (M = \rho l) \quad (2)$$

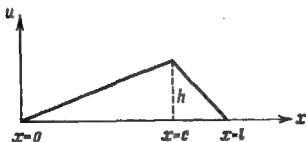
وتتناقص متناسبة عكسياً مع n^2 .

في المسألة ٤ من بند ٣ ندرس النظرية المبسطة للإثارة النقرية (الصدمية) للأوتار بواسطة صدمة مركزة عند النقطة c بدفع K . وحل المسألة يعبر عنه في الصورة

$$u(x, t) = \frac{2K}{\pi a \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right), \quad (3)$$

$$E_n = \frac{K^2}{M} \sin^2 \frac{\pi n c}{l}. \quad (4)$$

وبذلك فعند إثارة الوتر بصدمة مركزة على فترة غير كبيرة طولها δ تكون طاقات التوافقيات المختلفة (التي لها δ صغيرة بالمقارنة مع البعد بين عقدتين) مختلفة قليلاً فيما بينها ، والنغمة الصادرة عن الوتر المثار بهذه الطريقة تكون مشبعة بالنغمات المتوافقة. وهذا



شكل ٢٩

الاستنتاج سهل التحقق منه بالتجربة العملية. فإذا صدم الوتر المشدود (على آلة أحادية الوتر) بمجد السكينة فإن الوتر سير ، ويكون الصوت مشبعاً

بالنغمات المتوافقة. وفي البيانو يثار الوتر بصدمة من مطرقة لفت بالجلد. ومثل هذه

الإثارة للوتر يمكن التعبير عنها بواسطة الأشكال التالية .

١ - يثار الوتر بإعطاء سرعة ابتدائية ثابتة v_0 على الفترة $(c - \delta, c + \delta)$ وهذه الحالة تناظر مطرقة صلبة عرضها 2δ وتصدم الوتر عند النقطة c وعملية الذبذبات توصف بالدالة (انظر المسألة ٣ في بند ٣)

$$u(x, t) = \frac{4v_0\delta}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t,$$

وطاقات التوافقيات المنفردة تكون مساوية

$$E_n = \frac{4Mv_0^2}{\pi^2 n^4} \sin^2 \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin^2 \frac{\pi n \delta}{l}.$$

٢ - يثار الوتر بالسرعة الابتدائية

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} v_0 \cos \frac{x-c}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} & |x-c| < \delta, \\ 0 & |x-c| > \delta. \end{cases}$$

وهذه الحالة تناظر مطرقة معدبة صلبة عرضها 2δ . ومثل هذه المطرقة تثير في مركز الفترة 2δ أكبر سرعة ابتدائية وهو ما يمكن التعبير عنه شكليا بالدالة الواردة أعلاه . والذبذبة المثارة بهذه الطريقة تكون على الصورة :

$$u(x, t) = \frac{8v_0\delta}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \sin \frac{\pi n}{l} c}{1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t$$

وطاقات التوافقيات تساوى

$$E_n = \frac{16v_0^2\delta^2\rho}{l\pi^2} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right]^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi n \delta}{l} \cdot \sin^2 \frac{\pi n c}{l}.$$

٣ - المطرقة المثيرة للذبذبة الوتر لا تعتبر مثالية الصلابة . وفي هذه الحالة تتحدّد الذبذبات لا بالسرعة الابتدائية وإنما بالقوة المتغيرة مع الزمن . وبذلك نصل إلى المعادلة غير المتجانسة ذات الطرف الأيمن

$$F(x, t) = \begin{cases} F_0 \cos \frac{x-c}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{\tau}, & |x-c| < \delta, \\ 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & |x-c| > \delta, \\ & t > \tau. \end{cases}$$

وحل هذه المعادلة لحالة $t > \tau$ يعبر عنه في الصورة :

$$u(x, t) = \frac{16F_0\tau\delta}{\pi^2\rho a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{\pi n \delta}{l} \cos \frac{\omega_n \tau}{2} \sin \frac{\pi n c}{l}}{\left[1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{n a \tau}{l}\right)^2\right]} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \omega_n \left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

وتوضح الأمثلة المدروسة أن عرض الفترة التي تحدث عليها الصدمة وطول الفترة الزمنية لاستمرار الصدمة لها تأثير جوهري جدا على مقدار طاقات النغمت التوافقية العالية . ونشير علاوة على ذلك أن وجود المعامل $\sin \frac{\pi n}{l} c$ يوضح أنه إذا كان مركز الصدمة بالمطرقة يقع على عقدة التوافقية الـ n فإن طاقة التوافقية المناظرة تكون مساوية للصفر .

ووجود النغمت المتوافقة العالية (ابتداء من السابعة) يخل بتوافق (تناغم) الصوت ويحدث شعورا بالتنافر^٢ (dissonance) أما وجود النغمت للتوافقة المنخفضة فيؤدي على العكس إلى شعور بكمال الصوت . وفي البيانو يختار مكان صدمة المطرقة قريبا من نقطة تثبيت الوتر بين عقدتي النغمتين المتوافقتين السابعة والثامنة وذلك للتقليل من طاقتها . وبالتحكم في عرض المطرقة وصلابتها يمكن زيادة الطاقة النسبية للنغمت المتوافقة المنخفضة (الثالثة والرابعة) . وفي آلات البيانو المصممة على النمط القديم التي كان صوتها حادا بل حتى رنانا بدرجة معينة كانت تستخدم مطارق أصبغ وأكثر صلابة مما في الآلات الحديثة .

ملحق ٢ - حول ذبذبة القضبان

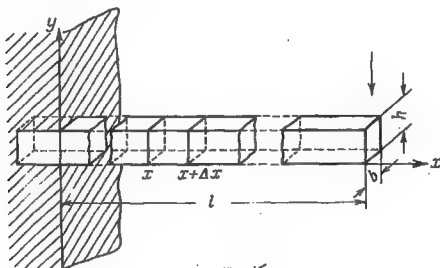
تشغل دراسة المعادلات من الرتبة الثانية عادة الحيز الأكبر في مناهج طرق الفيزياء الرياضية . إلا أن عددا كبيرا من مسائل ذبذبات القضبان والألواح وغيرها يؤدي إلى معادلات من رتب أعلى .

• على سبيل المثال إذا كان التردد الأساسي (التوافقية الأولى) ٤٤٠ ذبذبة في الثانية يناظر ولاء من الثانية الأولى (الأوكتاف الأولى) فإن التردد الأكبر سبع مرات سيناطر «صول» في الأوكتاف الرابعة . والفترة لا - صول التي تسمى بالسباعية الصغرى لها طابع غير مريح ومنفر للسمع .

وكمثال على المعادلة من الرتبة الرابعة ندرس مسألة الذبذبات الذاتية للشوكة الرنانة (tuning fork) وهي تكافئ مسألة ذبذبات قضيب رقيق مستطيل المقطع أحد طرفيه مزنوق زنقة صلبة في كتلة خرسانية . وتعين شكل ذبذبات الشوكة الرنانة وتردداتها يؤول إلى حل « معادلة الذبذبات المستعرضة للقضيب »

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (1)$$

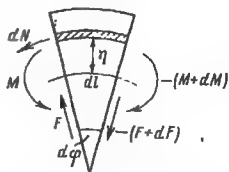
ونصل إلى مثل هذه المعادلة في كثير من المسائل المتعلقة بذبذبات القضبان وعند حساب استقرار الاسطوانات الدائرة وكذلك عند دراسة الاهتزازات في السفن .



شكل ٣٠

نورد الاستنباط الأولى للمعادلة (1) . ندرس قضيبا مستطيل المقطع طوله l ($0 \leq x \leq l$) وارتفاعه h وعرضه b (شكل ٣٠) . نفصل عنصرا للطول dx . وبعد الانحناء تكون المقاطع الطرفية للعنصر المأخوذ التي يفترض أنها مستوية - زاوية $d\varphi$. وإذا كانت التشوهات (الانفعالات) صغيرة وطول محور القضيب عند الانحناء لا يتغير ($dl = dx$) فإن

$$d\varphi = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx} = - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$



شكل ٣١

وطبقة المادة التي تبعد عن محور القضيب $y = 0$ بمسافة η يتغير طولها بمقدار $d\varphi \eta$

(شكل ٣١) . . ووفقا لقانون هوك تكون قوة الشد المؤثرة على الطبقة مساوية :

$$dN = E \cdot b \, d\eta \cdot \frac{\eta \, d\eta}{dx} = -E \cdot b \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \eta \, d\eta,$$

حيث E معامل مرونة المادة المصنوع منها القضيب . وعزم الشئ الكامل للقوى المؤثرة في المقطع x يساوى

$$M = -E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 \, d\eta = -E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} J, \quad (2)$$

حيث

$$J = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 \, d\eta = \frac{bh^3}{12}$$

هو عزم القصور الذاتي للمقطع المستطيل حول المحور الأفقى . نرسم بالرمز $M(x)$ للعزم المؤثر على الجزء الأيمن للقضيب في كل مقطع . وفى المقطع $x + dx$ من الواضح انه يؤثر عزم القوى المساوى $(M + dM)$.
والعزم الاضافى $-dM$ يتزن بعزم القوى المماسية

$$dM = F \, dx.$$

ومن هنا ووفقا للمتساوية (2) نحصل على مقدار القوة المماسية

$$F(x, t) = \frac{\partial M}{\partial x} = -EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}. \quad (3)$$

وبمساواة القوة المحصلة للمؤثرة على العنصر

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx = -EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx$$

بحاصل ضرب كتلة العنصر فى السرعة

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx,$$

حيث ρ كثافة القضيب ، S مساحة المقطع العرضى (ونحن نهمل عند ذلك

الحركة الدورانية عند الثنى) ، نحصل على معادلة الذبذبات المستعرجة للفضب

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (a^2 = \frac{EI}{\rho S}). \quad (1)$$

والشروط الحدية للطرف المزنوق $x=0$ هى ثبات القضيب وأفقية الماس

$$y|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0. \quad (4)$$

وعلى الطرف الحر يجب أن يساوى الصفر كل من عزم الثنى (2) والقوة الماسية (3) ومن هنا يتبع أن

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}|_{x=l} = 0. \quad (5)$$

ولتعيين حركة القضيب تماما يجب إعطاء الشروط الابتدائية أيضا ، أى الانحراف الابتدائى والسرعة الابتدائية

$$y|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0} = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (6)$$

وبذلك تؤول المسألة إلى حل المعادلة (1) بالشروط الحدية (5)، (4) والشروط الابتدائية (6).

سنحل المسألة بطريقة فصل المتغيرات بفرض ان

$$y = Y(x) T(t). \quad (7)$$

بالتعويض عن صورة الحل المقترحة فى (1) نحصل على :

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\frac{Y^{(4)}(x)}{Y(x)} = -\lambda.$$

وللدالة $Y(x)$ نحصل على مسألة القيم الذاتية :

$$Y^{(4)} - \lambda Y = 0, \quad (8)$$

$$Y|_{x=0} = 0, \quad \frac{dY}{dx}|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dx^2}|_{x=l} = 0, \quad \frac{d^3 Y}{dx^3}|_{x=l} = 0. \quad (9)$$

والحل العام للمعادلة (8) يكون على الصورة

$$Y(x) = A \cosh \sqrt[4]{\lambda} x + B \sinh \sqrt[4]{\lambda} x + C \cos \sqrt[4]{\lambda} x + D \sin \sqrt[4]{\lambda} x.$$

ومن الشرطين $Y(0)=0, Y'(0)=0$ نجد أن $C=-A, D=-B$ ومن هنا ينتج أن

$$Y(x) = A(\cosh \sqrt{\lambda}x - \cos \sqrt{\lambda}x) + B(\sinh \sqrt{\lambda}x - \sin \sqrt{\lambda}x).$$

والشرطان $Y''(l)=0, Y'''(l)=0$ يعطيان

$$A(\cosh \sqrt{\lambda}l + \cos \sqrt{\lambda}l) + B(\sinh \sqrt{\lambda}l + \sin \sqrt{\lambda}l) = 0,$$

$$A(\sinh \sqrt{\lambda}l - \sin \sqrt{\lambda}l) + B(\cosh \sqrt{\lambda}l + \cos \sqrt{\lambda}l) = 0.$$

وهذه المجموعة المتجانسة يكون لها حلان غير تافهين A, B إذا كان محدد المجموعة يساوى الصفر. وبمساواة هذا المحدد بالصفر نحصل على معادلة متساوية (transcendental) لحساب القيم الذاتية

$$\sinh^2 \sqrt{\lambda}l - \sin^2 \sqrt{\lambda}l = \cosh^2 \sqrt{\lambda}l + 2 \cosh \sqrt{\lambda}l \cos \sqrt{\lambda}l + \cos^2 \sqrt{\lambda}l.$$

وحيث أن $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ فإن هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$\cosh \mu \cdot \cos \mu = -1 \quad (\mu = \sqrt{\lambda}l). \quad (10)$$

وجذور هذه المعادلة (10) يمكن حسابها بسهولة . وذلك مثلاً بالطريقة

البيانية :

$$\mu_1 = 1.875,$$

$$\mu_2 = 4.694,$$

$$\mu_3 = 7.854,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$. \quad n > 3 \quad \mu_n \approx \frac{\pi}{2}(2n-1)$$

والعلاقة الأخيرة تعطى قيمة μ_n بدقة حتى ثلاثة أرقام عشرية ابتداء من $n=3$

وبدقة حتى ستة أرقام عشرية لقيم $n \geq 7$.

ندرس الآن ترددات ذبذبات الشبكة الرنانة . المعادلة

$$T'' + a^2 \lambda_n T = 0$$

تحققها الدوال المثلثية

$$T_n(t) = a_n \cos 2\pi \nu_n t + b_n \sin 2\pi \nu_n t$$

$$v_n = \frac{a\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = \frac{\mu_n^2}{2\pi d^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

والترددات v_n للذبذبات الذاتية تتناسب فيما بينها كمربعات μ_n . وحيث أن

$$\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} = 6.267, \quad \frac{\mu_3^2}{\mu_1^2} = 17.548,$$

فإن النغمة الذاتية الثانية أعلى من النغمة الأساسية بأكثر من اوكتافتين ونصف أى أعلى من التوافقية السادسة للوتر ذى نفس النغمة الأساسية. أما الذبذبة الذاتية الثالثة فأعلى من النغمة الأساسية بأكثر من أربعة اوكتافات. فعلى سبيل المثال إذا كانت النغمة الأساسية للشوكة الرنانة 440 ذبذبة فى الثانية (المعيار المصطلح عليه لـ 'a' النوتة «لا» من الاوكتافا الأولى) فإن التردد الذاتى التالى للشوكة الرنانة سيكون مساويا 2757.5 ذبذبة فى الثانية (بين $c'''' = 2637.3$ و $f'''' = 2794.0$) أى بين النوتتين «مى» و «فا» من الاوكتافا الزابعة فى السلم المنتظم الجرس) أما التردد الذاتى الثالث الذى يشكل 7721.1 ذبذبة فى الثانية فيخرج عن نطاق سلم الأصوات الموسيقية الذاتية.

وعند إثارة ذبذبات الشوكة الرنانة بصدمة (نفرة) توجد ليس فقط التوافقية الأولى بل والتوافقيات الأعلى أيضا وهذا ما يفسر الصوت المعدنى فى اللحظة الابتدائية. غير أنه مع مرور الزمن تخمد التوافقيات العليا بسرعة وتصدر الشوكة الرنانة الصوت النقي للنغمة الأساسية.

ملحق ٣ - ذبذبات الوتر المحمل

١ - صياغة المسألة. ندرس مسألة ذبذبات الوتر المثبت الطرفين. (0, l) وضعت

عند عدة نقط من نقاطه $x = x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) الكتل المركزة M_i .

ويمكن الحصول على الشروط عند النقطة x_i بطريقتين. إذا أثرت فى النقطة

x_i ($i=1, 2, \dots, n$) قوة مركزة $F_i(t)$ فإنه يجب أن تتحقق العلاقتان

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t), \quad (1)$$

$$ku_x|_{x_i-0}^{x_i+0} = -F_i. \quad (2)$$

وفي حالتنا هذه يجب فهم F_i على أنها قوة القصور . وبالتعويض في العلاقة (2) عن

$$F_i = -M_i u_{ii}(x_i, t),$$

نحصل على

$$M_i u_{ii}(x_i, t) = k u_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0}. \quad (3)$$

ومن الممكن استنباط العلاقة (3) بطريقة أخرى . نوزع الكتلة M_i على المنطقة (الجوار) $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ بكثافة ثابتة δ_i ونستعين بمعادلة الذبذبات للوتر غير المتجانس

$$(\rho + \delta_i) u_{ii} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon, \quad (4)$$

حيث ρ كثافة الوتر . نفرض أن $u_\varepsilon(x, t)$ هي حل هذه المعادلة .

بتكامل المعادلة (4) بالنسبة إلى x في الحدود من $x_i - \varepsilon$ إلى $x_i + \varepsilon$ والانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ نحصل على الشرط (3) للدالة $u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t)$. ولن نتوقف هنا عند تبرير الانتقال إلى النهاية .

نصوغ مسألتنا صياغة كاملة :

عين حل معادلة الذبذبات

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (5)$$

الذى يحقق الشروط الحدية

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

وشروط الترافق في النقط $x = x_i$

$$\left. \begin{aligned} u(x_i - 0, t) &= u(x_i + 0, t), \\ M_i u_{ii}(x_i, t) &= k u_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

والشروط الابتدائية

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

حيث $\psi(x)$ ، $\varphi(x)$ دالتان معطتان .

٢- الذبذبات الذاتية للوتر المحمل . نتوقف في البداية عند بحث الترددات الذاتية والمقاطع الجانبية للموجات المستقرة للوتر المحمل . ولهذا الغرض يجب تعيين حل المسألة المطروحة القابل للتعبير عنه في صورة حاصل الضرب

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (9)$$

بالتعويض بهذه الصيغة في المعادلة (5) والاستعانة بالشروط الحدية نحصل بعد فصل المتغيرات على

$$T'' + \lambda T = 0 \quad (10)$$

و

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dX}{dx} \right) + \lambda \rho X &= (kX')' + \lambda \rho X = 0, \\ X(0) &= 0, \quad X(l) = 0. \end{aligned} \right\}$$

وتعطى شروط الترافق :

$$X(x_i - 0) = X(x_i + 0),$$

$$M_i X(x_i) T'' = kX' \int_{x_i-0}^{x_i+0} T.$$

وبالأخذ في الاعتبار المعادلة (10) نكتب العلاقة الأخيرة في الصورة

$$kX' \int_{x_i-0}^{x_i+0} = -\lambda M_i X(x_i).$$

وبذلك نحصل للدالة $X(x)$ على مسألة القيم الذاتية التالية :

$$\frac{d}{dx} (kX') + \lambda \rho X = 0, \quad k(x) > 0, \quad \rho(x) > 0, \quad (11)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} X(x_i - 0) &= X(x_i + 0) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \\ kX'(x_i + 0) - kX'(x_i - 0) + \lambda M_i X(x_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

والصفة المميزة للمسألة الحدية محل الدراسة هي أن البارامتر λ لا يدخل فقط في المعادلة وإنما يدخل أيضا في الشروط الإضافية .

ولن نتوقف هنا عند إثبات وجود فئة لانهائية من القيم الذاتية والدوال الذاتية وإيجابية القيم الذاتية ونظرية القابلية للتحليل . وهذه المسألة الحدية مثلها مثل

المسائل من النمط المعتاد التي درسناها في بند ٣ من الباب الثاني تؤول إلى معادلة تكاملية ما تعتبر في حالتنا هذه معادلة تكاملية محملة وتكافئ المعادلة التكاملية في تكاملات ستيلتيس .

ندرس بتفصيل أكبر استنباط شرط تعامد الدوال الذاتية

$$X_1(x), \quad X_2(x), \dots,$$

الذى يكون في حالتنا هذه مختلفا عن الشرط (92) بند ٣ ويسمى بشرط التعامد بالأحمال .

وكما وضحنا في الباب الثاني (انظر بند ٣) ، تكون الدوال الذاتية للمسألة الحدية

$$\frac{d}{dx} \left(h \frac{dX}{dx} \right) + \lambda \rho X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

متعامدة بالوزن ρ في الفترة $(0, l)$:

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0 \quad (m \neq n). \quad (14)$$

وبتوزيع كل كتلة M_i بكثافة ثابتة δ_i على فترة ما $x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon$ حيث $\varepsilon > 0$ عدد صغير ، نصل إلى مسألة الذبذبات الذاتية للوتر غير المتجانس بالكثافة $\rho_\varepsilon(x)$. نفرض أن $\lambda_{\varepsilon n}$ و $\{X_{\varepsilon n}(x)\}$ هي القيم الذاتية والدوال الذاتية لهذه المسألة التي يجب أن يتحقق لها شرط التعامد

$$\int_0^l X_{\varepsilon m}(x) X_{\varepsilon n}(x) \rho_\varepsilon(x) dx = 0. \quad (15)$$

وبفصل التكاملات المأخوذة على الفترات $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ في المساواة (15) والانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ نحصل على العلاقة

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^n M_i X_m(x_i) X_n(x_i) = 0 \quad (m \neq n), \quad (16)$$

التي تسمى بشرط التعامد بالأحمال .

ومرة أخرى نترك جانبا موضوع إمكانية هذا الانتقال إلى النهاية .

وشرط التعامد (16) يمكن الحصول عليه بطريقة شكلية بجثة من المعادلة والشروط (13)–(11). نفرض أن $X_m(x)$, $X_n(x)$ دالتان ذاتيتان للمسألة (13)–(11) تناظران القيمتين الذاتيتين λ_m , λ_n وتحققان المعادلتين

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(k \frac{dX_m}{dx} \right) + \lambda_m \rho X_m &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left(k \frac{dX_n}{dx} \right) + \lambda_n \rho X_n &= 0.\end{aligned}$$

نضرب المعادلة الأولى في $X_n(x)$ والثانية في $X_m(x)$ ونطرح الناتج الثاني من الأول. بتكامل المتساوية الناتجة بعد ذلك على الترتيب على المناطق $(0, x_1)$; (x_1, x_2) ; ...; (x_N, l) وجمع التكاملات نحصل على

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx - \\ - \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} [X_m k X'_n - X_n k X'_m] dx = 0, \quad (17)\end{aligned}$$

علما بأننا فرضنا $x_0=0$, $x_{N+1}=l$. وبإجراء التكامل لكل حد من حدود المجموع ثم تجميع الحدود المناظرة للمتوحيذين $x=x_i+0$, $x=x_i-0$ نحصل على مجموع الحدود على الصورة

$$A_i = (X_m k X'_n - X_n k X'_m)_{x=x_i-0} - (X_m k X'_n - X_n k X'_m)_{x=x_i+0}.$$

وعند ذلك فالتوحيذين عند $x=0$, $x=l$ يؤولان إلى الصفر وفقا للشروط الحدية.

ولحساب A_i نستعين بشروط الترافق

$$\left. \begin{aligned}X_j(x_i-0) &= X_j(x_i+0), \\ kX'_j(x_i+0) - kX'_j(x_i-0) &= -M_i \lambda_j X_j(x_i)\end{aligned} \right\} \quad (j=m, n). \quad (13')$$

وبكتابة A_i في الصورة

$$\begin{aligned}A_i &= X_m(x_i) [kX'_n(x_i-0) - kX'_n(x_i+0)] - \\ &\quad - X_n(x_i) [kX'_m(x_i-0) - kX'_m(x_i+0)]\end{aligned}$$

وبالاستعانة بالعلاقة (13) نجد أن

$$\begin{aligned} A_i &= X_m(x_i) M_i \lambda_n X_n(x_i) - X_n(x_i) M_i \lambda_m X_m(x_i) = \\ &= M_i X_m(x_i) X_n(x_i) (\lambda_n - \lambda_m). \end{aligned}$$

والآن يمكن كتابة المساوية (17) في الصورة

$$(\lambda_m - \lambda_n) \left\{ \int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N M_i X_m(x_i) X_n(x_i) \right\} = 0.$$

وإذا كان $\lambda_m \neq \lambda_n$ فإنه ينتج من هنا مباشرة شرط التعامد بالأحمال (16).

ويتحدد معيار (norm) الدوال الذاتية $X_n(x)$ بالعلاقة

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N M_i X_n^2(x_i). \quad (18)$$

ومن الواضح أنه عند تحليل دالة ما $f(x)$ في المتسلسلة

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x)$$

تتحدد معاملات التحليل بالعلاقة

$$f_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N M_i f(x_i) X_n(x_i)}{\|X_n\|^2}. \quad (19)$$

والمسألة بالمعطيات الابتدائية المصاغة في فقرة ١ تحل بالطريقة المعتادة لفصل المتغيرات. وبالمثل تدرس مسألةذبذبة القضيب (أو العارضة) عند وجود كتل مركزة.

ومسألةذبذبات الوتر المحمل بكتل مركزة تجد تطبيقا واسع النطاق في الفيزياء والعلوم التكنيكية. لقد حل بواسون مسألة الحركة الطولية لثقل معلق بحيط مرن. ووضح أ. كري洛夫 أنه إلى هذه المسألة تؤول مسائل نظرية مبن المحرك البخاوى (steam engine indicator) ومسائل الذبذبات الدورانية (الالتوائية) للاسطوانة المثبت بطرفها حذافة (flywheel) والمسائل على مختلف أنواع الصمامات «الرعاشة» وغيرها.

ولنظرية العديد من أجهزة القياس يكون من المهم دراسة الذبذبات الدورانية
 نخط عقلت بطرفه كتلة (مرآة مثلاً) . وقد اكتسبت المسائل من هذا النمط أهمية
 كبيرة خاصة نتيجة لدراسة استقرار اهتزازات أجنحة الطائرات . فلحل هذه
 المسألة لا بد من حساب الترددات الذاتية للجناح (عارضة متغيرة المقطع) المحمل
 بالكتل (الموتورات) . وعلاوة على ذلك فإن المسألة المدروسة هذه تقابلنا عند
 حساب الذبذبات الذاتية للهوائيات المحملة بالسعات المركزة وملفات الحث الذاتي
 المركزة (فيما يتعلق بذلك انظر الملحق المخصص للتشابه بين الذبذبات الميكانيكية
 والكهرومغناطيسية) .

ولن نتوقف هنا عند الطرق التقريبية لتعيين القيم والدوال الذاتية للمسألة وهي
 الطرق المماثلة للطرق التقريبية لتعيين المقادير المناظرة للوتر غير المتجانس .

٣- وتر بطرفه ثقل . تشكل أهمية عملية كبيرة مسألة ذبذبات الوتر المتجانس
 الذي يثبت أحد طرفيه ($x=0$) بلا حركة ويعلق بالطرف الآخر ($x=l$) ثقل
 كتلته M .

وفي هذه الحالة يأخذ الشرط عند $x=l$ الصورة

$$Mu_H = -ku_x(l, t)$$

ولسعة الموجات المستقرة نحصل على المعادلة

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0$$

بالشروط الحدية

$$X_n(0) = 0, \quad X_n'(l) = \frac{M}{\rho} \lambda_n X_n(l).$$

ومن هنا نجد أن

$$X_n(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} x}{\sin \sqrt{\lambda_n} l},$$

حيث λ_n تعين من المعادلة

$$\cot \sqrt{\lambda_n} l = \frac{M}{\rho} \sqrt{\lambda_n}. \quad (20)$$

ويأخذ شرط تعامد الدوال $\{X_n(x)\}$ الصورة

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) \rho dx + M X_n(l) X_m(l) = 0.$$

نحسب مربع المعيار

$$N_n = \int_0^l X_n^2(x) \rho dx + M X_n^2(l).$$

وبالاستعانة بالمعادلة (20) نحصل على :

$$N_n = \frac{l\rho}{2} + \frac{M}{2} + \frac{M^2}{2\rho} \lambda_n l.$$

وتحل المسألة بالشروط الابتدائية بالطريقة المعتادة .

٤ - تصحيحات للقيم الذاتية . نحسب التصحيحات للترددات الذاتية في حالة الأحمال M الصغيرة والكبيرة . وللبساطة ندرس تلك الحالة عندما يكون الثقل معلقا بطرف الوتر . وهناك حالتان نهائيتان محتملتان .

١ - $M=0$. الطرف $x=l$ حر . وتحدد القيم الذاتية من العلاقة

$$\sqrt{\lambda_n^{(1)}} = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l}.$$

٢ - $M=\infty$. الطرف $x=l$ مثبت بصلاية : $u(l, t) = 0$. والقيم الذاتية

تحدد من العلاقة

$$\sqrt{\lambda_n^{(2)}} = \frac{n\pi}{l}.$$

وسنهتم بحالتى الأحمال M الصغيرة ($M \rightarrow 0$) والكبيرة ($M \rightarrow \infty$) .
(١) M صغيرة . نعين التصحيح للقيمة الذاتية $\lambda_n^{(1)}$ بفرض

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(1)}} + \epsilon M, \quad (21)$$

حيث ϵ عدد ما . بالتعويض بـ (21) في المعادلة (20) وإهمال M^2 وقوى M الأعلى نحصل على :

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} \left(1 - \frac{2M}{\rho l} \right), \quad (22)$$

أى أن الترددات الذاتية للوتر المحمل تزايد عندما $M \rightarrow 0$ مقربة من الترددات الذاتية للوتر الحر الطرف .

(ب) M كبيرة . باختيار $1/M$ بمثابة بارامتر الصغر نضع

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \varepsilon \frac{1}{M} .$$

والمعادلة (20) تعطى :

$$\varepsilon = \frac{n}{\sqrt{\lambda_n^{(2)}} l} .$$

وعند ذلك أهملنا الحدود المحتوية على $1/M^2$ وقوى $1/M$ الأعلى .

وبذلك فإن

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{(2)}} l} \frac{p}{M} , \quad \lambda_n = \lambda_n^{(2)} + \frac{2p}{Mk} . \quad (23)$$

أى أنه بزيادة الأحمال تتناقص الترددات الذاتية مقربة بانتظام إلى الترددات الذاتية للوتر المثبت الطرفين .

ملحق ٤ - معادلات ديناميكا الغازات ونظرية الموجات الصادمة (الانفجارات)

١ - معادلات ديناميكا الغازات . قانون حفظ الطاقة . تحت معادلات

الصوتيات (انظر بند ١) بافتراض صغر سرعات حركة الغاز والتغيرات الصغيرة فى الضغط مما سمح بتحويل معادلات الهيدروديناميكا إلى معادلات خطية .

وفى المسائل الناشئة عند دراسة طيران الصواريخ والطائرات السريعة وفى نظرية علم القذائف (ballistics) والموجات المفجرة .. الخ نضطر إلى مقابلة عمليات هيدروديناميكية تتميز بسرعات كبيرة وتدرجات (gradients) للضغط كبيرة . وفى هذه الحالة فإن التقريب الخطى للصوتيات يصبح غير صالح ولا بد من استخدام المعادلات اللاخطية للهيدروديناميكا . وحيث إن مثل هذه الحركات نقابلها فى الحياة العملية فى الغازات يصطلح على تسمية هيدروديناميكا السرعات الكبيرة بديناميكا الغازات .

ومعادلات ديناميكا الغازات في حالة حركة الغازات الأحادية البعد (في اتجاه المحور x) تكون على الصورة :

$$\text{(معادلة الاتصال)} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad (1)$$

$$\text{(معادلة الحركة)} \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

$$\text{(معادلة الحالة)} \quad p = f(\rho, T) \quad (3)$$

وبذلك فمعادلات ديناميكا الغازات هي عبارة عن معادلات حركة سائل مثالي قابل للانضغاط (compressible) بانعدام القوى الخارجية .

نتقل الآن إلى استنباط قانون حفظ الطاقة . طاقة وحدة الحجم تساوى

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho e, \quad (4)$$

حيث الحد الأول هو طاقة الحركة والحد الثاني هو الطاقة الداخلية . ومن الواضح أن e هنا ترمز إلى الطاقة الداخلية لوحدة الكتلة .

وللغاز المثالي $e = c_v T$ حيث c_v هي السعة الحرارية عند ثبات الحجم . T درجة الحرارة . نحسب تغير الطاقة في وحدة الزمن

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho e). \quad (5)$$

وبإجراء التفاضل في الحد الأول والاستعانة بالمعادلتين (1) . (2) نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) = \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{v^2}{2} \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) - \rho v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) - v \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (6)$$

ولحساب المشتقة $\frac{\partial}{\partial t}(\rho e)$ نلجأ إلى المبدأ الأول في الديناميكا الحرارية (الثرموديناميكا) الذى يعبر عن قانون حفظ الطاقة

$$dQ = de + p d\tau, \quad (7)$$

حيث dQ كمية الحرارة التى تكتسبها (أو تمنحها) المجموعة من الخارج . $p d\tau$ الشغل المبذول عند تغير الحجم بمقدار $d\tau = 1/\rho$ الحجم النوعى) .

وإذا كانت العملية أدياباتيية (لا يوجد تبادل حرارى مع الوسط) فإن

$$dQ = 0$$

$$ds = -pd\frac{1}{\rho} = \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (8)$$

وبالاستعانة بهذه المتساوية نجد أن

$$d(\rho s) = s d\rho + \rho ds = s d\rho + \frac{p}{\rho} d\rho = w d\rho, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) = w \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (10)$$

حيث

$$w = s + \frac{p}{\rho} \quad (11)$$

هى الدالة الحرارية أو المحتوى الحرارى لوحدة الكتل .
والمشتقة $\frac{\partial w}{\partial x}$ وفقا للعلاقتين (9) و (11) تحقق المعادلة

$$\rho v \frac{\partial w}{\partial x} = v \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (12)$$

وبالأخذ فى الاعتبار المتساويات (2), (5), (6), (10), (12) نحصل على

قانون حفظ الطاقة فى الصورة التفاضلية :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho s \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right]. \quad (13)$$

ولتوضيح المعنى الفيزيائى لهذه العلاقة نكاملها على حجم ما (x_1, x_2) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho s \right) dx = - \rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \Big|_{x_1}^{x_2}.$$

وفى الطرف الأيسر يوجد تغير الطاقة فى وحدة الزمن على الفترة (x_1, x_2) وفى الطرف الأيمن يوجد دفق الطاقة المتسربة خلال وحدة الزمن من الحجم المعنى .

وإذا لم يكن من الممكن إهمال ظاهرة التوصيل الحرارى فإن معادلة حفظ الطاقة تأخذ الصورة

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho s \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - x \frac{\partial T}{\partial x} \right]. \quad (14)$$

حيث % معامل التوصيل الحرارى .

٢- الموجات الصادمة . شرط الاتصال الديناميكي . فى حالة السرعات الكبيرة من الممكن حدوث حركات تنشأ عندها على بعض السطوح المتحركة فى الفراغ انفصالات للاتصال فى توزيع الكيات الهيدروديناميكية (الضغط ، السرعة ، الكثافة .. الخ) . وهذه الانفصالات يصطلح على تسميتها بالموجات الصادمة أو الانفجارات (blast) .

وعلى سطح الانفصال (جبهة الموجة الصادمة) يجب أن تتحقق شروط اتصال دفع المادة ، والطاقة وكمية الحركة (شروط جيوغونيو) . ننقل إلى استنباط هذه الشروط .

نحول المعادلة (2) إلى صورة مناسبة لهدفنا . نضرب (1) فى v ونجمع الناتج على (2) فنحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2). \quad (2')$$

نكتب الآن معادلات الاتصال والحركة وحفظ الطاقة فى الصورة

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v), \quad (1')$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2), \quad (2')$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right]. \quad (13)$$

ندرس على المستوى (x, t) المنحنى $x = \alpha(t)$ الذى يعتبره أثراً لسطح الانفصال على المستوى (x, t) . نفرض أن AC قوس ما من خط الانفصال $x = \alpha(t)$ حيث C . نقطتان إحداثياتها $x_1: t_1$ ، $x_2 = x_1 + \Delta x$ ، $t_2 = t_1 + \Delta t$ على الترتيب . تكون المستطيل $ABCD$ الذى أضلاعه توازى محورى الإحداثيات .

نكتب قانون حفظ المادة فى صورة تكاملية :

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho)_{t_2} - (\rho)_{t_1}] dx = - \int_{t_1}^{t_2} [(\rho v)_{x_2} - (\rho v)_{x_1}] dt, \quad (15)$$

حيث فى الطرف الأيسر يوجد تغير الكتلة على الفترة (x_1, x_2) خلال الفترة الزمنية

(t_1, t_2) وفي الطرف الأيمن توجد كمية المادة المتسربة من الفترة (x_1, x_2) خلال الفترة الزمنية (t_1, t_2). وإذا كانت الدالتان $\rho, \rho v$ متصلتين وقابلتين للتفاضل في كل مكان داخل $ABCD$ فإن المعادلة (15) تكون مكافئة للمعادلة (1'). وفي الحالة محل الدراسة لا يتحقق ذلك.

نستعين بنظرية القيمة المتوسطة لكل حد على انفراد :

$$[(\rho)_{t=t_2, x=x_2} - (\rho)_{t=t_1, x=x_1}] \frac{\Delta x}{\Delta t} = -(\rho v)_{x=x_2, t=t_2} + (\rho v)_{x=x_1, t=t_1}$$

حيث x^*, x^{**}, t^*, t^{**} القيم المتوسطة للمتغيرين x, t . وبالاتقال إلى النهاية عندما $\Delta x \rightarrow 0$ ($x_2 \rightarrow x_1$) و $\Delta t \rightarrow 0$ ($t_2 \rightarrow t_1$) والرمز بالدليل 2 إلى قيم الدوال أعلى المنحنى ($x = \alpha(t)$) (وراء جبهة الموجة الصادمة) وبالدليل 1 إلى قيم الدوال أسفل المنحنى (أمام الجبهة) نحصل على :

$$(\rho_2 - \rho_1) U = -(\rho v)_1 + (\rho v)_2 \quad (16)$$

حيث

$$U = \frac{d\alpha}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

سرعة الموجة الصادمة .

وفي مجموعة الإحداثيات المتحركة مع الموجة الصادمة يرمز

$$u_1 = U - v_1, \quad u_2 = U - v_2$$

لسرعة الجسيمات أمام وخلف جبهة الموجة الصادمة على الترتيب . والعلاقة (16) الناتجة فيما سبق يمكن كتابتها على الصورة

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (16')$$

وهذه المتساوية تعبر عن اتصال دفع المادة عبر جبهة الموجة الصادمة . وبكتابة قانون حفظ كمية الحركة في الصورة التكاملية نحصل على :

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho v)_2 - (\rho v)_1] dx = - \int_{t_1}^{t_2} [(p + \rho v^2)_2 - (p + \rho v^2)_1] dt,$$

حيث في الطرف الأيمن يوجد مجموع دفع القوى المؤثرة (الضغوط) ودفق كمية الحركة . وبالاتقال إلى النهاية عندما $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, نحصل على قانون حفظ دفع كمية الحركة على الجبهة

$$U[(\rho v)_2 - (\rho v)_1] = -(p + \rho v^2)_1 + (p + \rho v^2)_2$$

أو

$$\rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (17)$$

وبالمثل نحصل أيضا على معادلة حفظ الطاقة على الجبهة :

$$\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e\right)_2 U - \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e\right)_1 U = -\rho_1 v_1 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_1 + \rho_2 v_2 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_2$$

التي تأخذ بعد اختصارات بسيطة الصورة التالية :

$$\rho_1 u_1 \left(w_1 + \frac{u_1^2}{2}\right) = \rho_2 u_2 \left(w_2 + \frac{u_2^2}{2}\right)$$

أو وفقا للشرط (16) :

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (18)$$

وبذلك يجب أن تتحقق على جبهة الموجة الصادمة المعادلات (شروط الاتصال الديناميكي أو شروط جيوجونيو)

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad (16')$$

$$\rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2, \quad (17)$$

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (18)$$

ومن المعادلتين الأولى والثانية (17), (16') نعبّر عن u_1 , u_2 بدلالة p , ρ :

$$u_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_1 - \rho_2}, \quad u_2^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_1 - \rho_2},$$

ومنها

$$u_1^2 - u_2^2 = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} (p_1 - p_2).$$

وبالتعويض بعد ذلك بهذه الصيغة في المعادلة (18) نحصل على العلاقة بين قيمتي الطاقة على ناحيتي الجبهة

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2\rho_1\rho_2} (\rho_1 + \rho_2) (\rho_1 - \rho_2)$$

و

$$e_1 - e_2 = \frac{1}{2\rho_1\rho_2} (\rho_1 - \rho_2) (\rho_1 + \rho_2).$$

ندرس الغاز المثالي الذي يكون له

$$p = R\rho T; \quad e = c_v T; \quad w = c_p T = \frac{c_p}{c_p - c_v} RT = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho},$$

أي أن

$$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho}. \quad (19)$$

وبالاستعانة بالعلاقة (19) نصل بعد بعض الاختصارات البسيطة إلى ما يسمى بمعادلة أديابات جيوجونيو

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) p_2 + (\gamma - 1) p_1}{(\gamma - 1) p_2 + (\gamma + 1) p_1} \quad (20)$$

أو

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) p_2 - (\gamma - 1) p_1}{(\gamma + 1) p_1 - (\gamma - 1) p_2}. \quad (21)$$

ويمكن من هذه العلاقة تعيين أحد المقادير p_1, ρ_1, p_2, ρ_2 إذا علمت المقادير الثلاثة الأخرى.

والموجة الصادمة تتحرك دائماً بالنسبة إلى الغاز من المناطق ذات الضغط الأكبر إلى المناطق ذات الضغط الأقل: $p_2 > p_1$ (نظرية تسمبلن). ومن هنا يتبع أن كثافة الغاز وراء الجبهة أكبر من كثافته أمامها.

والعلاقة (20) تعبر عن العلاقة بين p_2, ρ_2 لقيمتي p_1, ρ_1 المعطتين. والدالة $p_2 = p_2(p_1)$ لقيمتي p_1, ρ_1 المعطتين هي عبارة عن دالة متزايدة باطراد تؤول إلى نهاية محدودة عند $p_2/p_1 \rightarrow \infty$ (الموجة الصادمة ذات السعة الكبيرة):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (22)$$

وهذه العلاقة توضح أكبر قفزة تحدث للكثافة (التكثيف) والتي يمكن أن توجد على جبهة الموجة الصادمة. وللغاز الثنائي الذرات $\gamma = 7/5$ والتكثيف الأقصى (الأعظم) يساوى 6 :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 6.$$

وبالاستعانة بالتساويات (20)، (17)، (16')، بفرض $p_1 = 0$ نعين :

$$u_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}; \quad u_2 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{2(\gamma+1)} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}.$$

وإذا كانت الموجة الصادمة تتحرك في غاز ساكن ($u_1 = 0$) فإن سرعة انتشار الموجة الصادمة تساوى

$$U = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}},$$

أى أن هذه السرعة تتزايد متناسبة مع الجذر التربيعى لـ p_2 .

ندرس أبسط مسألة لنظرية الموجات الصادمة تسمح بحل تحليلي. فى أنبوبة اسطوانية $x > 0$ لانهائية من أحد طرفيها ومقفولة بكباس عند الطرف الآخر ($x = 0$) يوجد غاز ساكن ثابت الكثافة ρ_1 تحت ضغط ثابت p_1 . وفى اللحظة الابتدائية $t = 0$ يبدأ الكباس فى التحرك بسرعة ثابتة v فى الاتجاه الموجب للمحور x . وتنشأ أمام الكباس موجة صادمة تنطبق فى اللحظة الابتدائية على الكباس وبعد ذلك تتبعه عنه بسرعة $U > v$. وبين الكباس وجبهة الموجة الصادمة تنشأ المنطقة 2 حيث يتحرك فيها الغاز بسرعة تساوى سرعة الكباس. وأمام الجبهة (المنطقة 1) يوجد الغاز فى حالة اللااضطراب (اللاإثارة) :

$$\rho = \rho_1, \quad p = p_1 \quad (v = 0).$$

وبالاستعانة بالشروط على الجبهة (18)، (17)، (16) يسهل تعيين سرعة الجبهة وكذلك مقدار القفزة فى الكثافة والضغط. نستعين بالمقادير اللاعبدية التالية :

$$\omega = \frac{p_1}{p_2}; \quad \bar{U} = \frac{U}{c_1}; \quad \bar{v} = \frac{v}{c_1}; \quad \bar{p} = \frac{\gamma p_2}{\rho_1 c_1^2}, \quad (23)$$

حيث $c_1 = \sqrt{\gamma p_1 / \rho_1}$ سرعة الصوت أمام الجبهة (فى المنطقة غير المضطربة 1).

وعندئذ نكتب معادلات الحفظ في الصورة التالية :

$$\bar{U} = \frac{\bar{v}}{1-\omega} \quad \text{أو} \quad \omega \bar{U} = \bar{U} - \bar{v} \quad (24)$$

$$\bar{p} = 1 + \gamma \frac{\bar{v}^2}{1-\omega} \quad \text{أو} \quad \bar{p} = 1 + \gamma \bar{U} \bar{v} \quad (25)$$

$$\bar{p}\omega = 1 + (\gamma - 1) \left(\bar{U} \bar{v} - \frac{1}{2} \bar{v}^2 \right). \quad (26)$$

ويحذف \bar{U} , \bar{p} من هذه المعادلات نحصل على معادلة تربيعية لتعيين ω :

$$2\omega^2 - \omega [4 + (\gamma + 1) \bar{v}^2] + [2 + (\gamma - 1) \bar{v}^2] = 0. \quad (27)$$

وحيث أنه واضح من معنى ω أنها أصغر من الواحد الصحيح ($\rho_2 > \rho_1$) ; $\omega < 1$;
نختار الجذر الأصغر للمعادلة التربيعية

$$\omega_2 = 1 + \frac{(\gamma + 1)}{4} \bar{v}^2 - \bar{v} \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16} \bar{v}^2}. \quad (28)$$

ومن المعادلتين (28) , (24) نجد أن

$$\bar{U} = \frac{(\gamma + 1)}{4} \bar{v} + \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16} \bar{v}^2}, \quad (29)$$

$$\bar{p} = 1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} \bar{v}^2 + \gamma \bar{v} \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16} \bar{v}^2}. \quad (30)$$

وبالعودة إلى المقادير الأصلية نحصل على :

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{1 + \frac{\gamma + 1}{4} \cdot \frac{v^2}{c_1^2} + \frac{v}{c_1} \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16c_1^2} v^2}}{1 + \frac{(\gamma - 1)}{2c_1^2} v^2}. \quad (31)$$

$$U = \frac{\gamma + 1}{4} v + c_1 \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16c_1^2} v^2}, \quad (32)$$

$$p_2 = p_1 \cdot \left\{ 1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} \frac{v^2}{c_1^2} + \frac{\gamma v}{c_1} \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16c_1^2} v^2} \right\}. \quad (33)$$

وحيث إن سرعة الموجة الصادمة ثابتة فسنحصل لموضع الجبهة في اللحظة
على :

$$x = a(t) = \left\{ \frac{(\gamma + 1)}{4} v + c_1 \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16c_1^2} v^2} \right\} t. \quad (34)$$

وفي الحالة النهائية $1 \gg v/c_1$ (الموجة الصادمة ذات الشدة الكبيرة) نعين من العلاقات (33) — (31) العلاقات النهائية

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}; \quad U = \frac{\gamma+1}{2} v; \quad p_2 = p_1 \cdot \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \cdot \frac{v^2}{c_1^2},$$

التي حصلنا عليها فيما سبق .

وإذا كان $1 \ll v/c_1$ (الموجة ذات الشدة الصغيرة) فإنه يمكن إهمال الحدود v^3/c_1^3 :

$$\rho_2 = \rho_1 \left(1 + \frac{v}{c_1}\right),$$

$$U = c_1 + \frac{(\gamma+1)}{4} v,$$

$$p_2 = p_1 \left(1 + \frac{\gamma v}{c_1}\right)$$

٣- الانفصالات الضعيفة . درسنا أعلاه حركة الموجة الصادمة التي يحدث على جبهتها للكميات ρ , p , v وغيرها قفزات . ومثل هذه الانفصالات تسمى انفصالات قوية .

ومن الممكن حدوث حركات ينشأ خلالها عند بعض السطوح قفزات للمشتقات الأولى للكميات ρ , p , v وغيرها في حين تظل الكميات نفسها متصلة . ومثل هذه الانفصالات تسمى بالانفصالات الضعيفة .

وفي بند ٢ ، فقرة ١٠ درسنا حركة الانفصالات من هذا النوع وأثبتنا أن هذه الانفصالات تنتشر على امتداد المميزات . وعند ذلك فقد كنا نطلق من معادلة الصوتيات . إلا أن النتيجة الماثلة تكون أيضا صحيحة للمسائل اللاخطية لديناميكا الغازات .

وليس من الصعب التحقق من أن سطح الانفصال الضعيف يتشر بالنسبة للغاز بسرعة تساوى سرعة الصوت المحلية . بالفعل نفصل جوارا (neighbourhood) صغيرا لسطح الانفصال الضعيف ونأخذ القيم للمتوسطة للكميات الهيدروديناميكية في هذا الجوار . ومن الواضح أنه يمكن دراسة الانفصال الضعيف على القيم للمتوسطة بوصفه اضطرابا صغيرا يحقق معادلة الصوتيات ويجب أن يتشر بسرعة الصوت المحلية .

وكمثال ندرس انسياب الغاز في مكان مفرغ من الهواء (موجة الخلخلة) .
نفرض أنه في اللحظة الابتدائية $t=0$ يسكن الغاز الذي يملأ نصف الفراغ $x > 0$ ويكون له قيمتان ثابتتان للكثافة ρ والضغط p_0 في كل المنطقة $x > 0$.
وعند $t=0$ يرفع الضغط الخارجى المؤثر على المستوى $x=0$ ويبدأ الغاز في الحركة . وعند ذلك ينشأ انفصال ضعيف (موجة خلخلة) ينتشر بسرعة الصوت c_0 في الاتجاه الموجب للمحور x . وعلى الجبهة الأمامية للغاز $x=x_1(t)$ عند $t=0$ نحصل على انفصال في الكثافة والضغط . غير أن هذا الانفصال يتلاشى فوراً بعد بداية الحركة .

بالفعل من شروط اتصال دفع المادة وكمية الحركة عندما $x=x_1(t)$

$$0 = \rho_1^- (v_1 - v_1^-) = \rho_1^+ (v_1 - v_1^+),$$

$$p_1^- + \rho_1^- (v_1 - v_1^-)^2 = p_1^+ + \rho_1^+ (v_1 - v_1^+)^2,$$

حيث ρ_1^- , p_1^- , v_1^- هي القيم من اليسار عند النقطة $x_1(t)$ ، ρ_1^+ , p_1^+ , v_1^+ هي القيم من اليمين عند النقطة $x_1(t)$. نحصل على :

$$p_1^+ = 0 \quad , \quad \rho_1^+ = 0,$$

لأن

$$p_1^- = p_1 = v_1^- = 0.$$

والعملية الأدياباتية تكون معادلة الحالة للغاز المثالى على الصورة

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (35)$$

وحل المسألة نبحث عنه في الصورة

$$\rho = \rho(\xi); \quad p = p(\xi); \quad v = v(\xi),$$

حيث $\xi = x/t$.

وبحساب المشتقات

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{t} \xi \frac{df}{d\xi}; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{df}{d\xi},$$

حيث $\rho = v$ و $f = \rho$. وبالتعويض عن نتائج هذه في المعادلتين (1) . (2) نحصل على :

$$\left. \begin{aligned} (v - \xi) \frac{d\rho}{d\xi} &= -\rho \frac{dv}{d\xi} \\ (v - \xi) \rho \frac{dv}{d\xi} &= \frac{d\rho}{d\xi} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

بضرب المعادلة الأولى في $(v - \xi)$ وجمع نتائج على معادلة ثانية يتبع :

$$(v - \xi)^2 \frac{d\rho}{d\xi} = \frac{d\rho}{d\xi}$$

$$\frac{d\rho}{d\rho} = (v - \xi)^2.$$

ومن هنا نحصل على

$$v - \xi = \pm \sqrt{\frac{d\rho}{d\rho}} = \pm c,$$

حيث c سرعة نفوذ في عسية الأديباتية .

وحيث أننا ندرس حركة الانقصاص الضعيف في الاتجاه الموجب لمحور x .

يجب أن نختار في علاقة سابقة لإشارة تساوية أي أن

$$v - \xi = -c. \quad (37)$$

بالتعويض بهذا حل في المعادلة (36) نحصل على :

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{c}{\rho} \quad (38)$$

و (وهو نفس الشيء) :

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{\rho c}.$$

وبالاستعانة بمعادلة حالة (35) نجد أن

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$$

وبعد تكامل المعادلة (38) نحصل على

$$v = \frac{2}{\gamma-1} \cdot c_0 \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right]. \quad (39)$$

ومن العلاقة الأخيرة يمكن التعبير عن p بدلالة v :

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \frac{v}{c_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}. \quad (40)$$

وهنا

$$c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$$

ترمز لسرعة الصوت عندما $v=0$ (في الغاز الساكن) . ويمكن أيضا كتابة العلاقة (39) في الصورة التالية :

$$\dot{v} = \frac{2}{\gamma-1} (c - c_0). \quad (41)$$

بالتعويض بالصيغة (40) الناتجة للكثافة ρ في معادلة الحالة (35) نجد أن :

$$\dot{p} = p_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \frac{v}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (42)$$

ومن المعادلتين (41) . (37) نحصل على العلاقة

$$v = \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right), \quad (43)$$

التي تعين ارتباط v بالمتغيرين x , t . وبالتعويض بالصيغة (43) الناتجة للسرعة v في العلاقات (42) , (40) نحصل على ارتباط p , ρ بالمتغيرين x , t في صورة صريحة . وكل الكميات يتضح أنها تعتمد على x/t . وإذا تم قياس المسافات في وحدات تتناسب مع t فلن تتغير صورة الحركة . ومثل هذه الحركة تسمى اتوماتية الطراز (autmodel) .

نعين سرعة حركة الجبهة الأمامية $v_1(t)$. بفرض $p=0$ في المتساوية (42) سنحصل على :

$$v_1 = -\frac{2}{\gamma-1} c_0. \quad (44)$$

ومن هنا يتبع أن سرعة انسياب الغاز إلى الفراغ محدودة . وللغازات الثنائية الذرات $\gamma=7/5$ و

$$v_1 = -5c_0.$$

والصيغة (44) لسرعة الجبهة اليسرى $x=x_1(t)$ يمكن الحصول عليها أيضا من معادلة التوازن في المادة

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho dx = \rho_0 x_2 = \rho_0 c_0 t. \quad (45)$$

وبالاستعانة بالمتغير $\xi = x/t$ نحصل على

$$\int_{v_1}^{c_0} \rho d\xi = \rho_0 c_0.$$

وبالتعويض بعد ذلك بصيغة ρ من (40) وفرض

$$1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \cdot \frac{\xi - c_0}{c_0} = \lambda,$$

نحصل على :

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^{\frac{2}{\gamma-1}} d\lambda = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (46)$$

حيث

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \cdot \frac{v_1 - c_0}{c_0}; \quad \lambda_2 = 1.$$

وبعد حساب التكامل (46) نحصل على

$$\lambda_2^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \lambda_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = 1,$$

أى أن

$$\lambda_1 = 0,$$

ومن هنا يتبع أن

$$v_1 = -\frac{2c_0}{\gamma-1}.$$

وهكذا حلت مسألة انسياب الغاز إلى المكان المفرغ .

ولقد اكتفينا فيها سبق بدراسة أبسط مسائل ديناميكا الغازات فقط . وللتعرف بشكل أكثر تفصيلا على الموضوعات الملموسة هنا على الطالب أن يرجع إلى المراجع المتخصصة .

ملحق ٥ - ديناميكا امتصاص الغازات

١ - المعادلات التي تصف عملية امتصاص الغازات . ندرس مسألة امتصاص الغاز (sorption) . نفرض أن خليطا من الغاز والهواء يمر في أنبوبة (سنعتبر محورها هو المحور الإحداثي x) مملوءة بمادة ماصة . نرمز بالرمز $a(x, t)$ لكثافة الغاز الممتص في وحدة حجوم المادة الماصة والرمز $u(x, t)$ لتركيز الغاز الموجود في مسام المادة للماصة في الطبقة x .

نكتب معادلة توازن المادة بافتراض أن سرعة الغاز v كبيرة بشكل كاف وعملية الانتشار (diffusion) لا تلعب أى دور في انتقال الغاز . ندرس طبقة من المادة الماصة من x_1 إلى x_2 خلال الفترة الزمنية من t_1 إلى t_2 . ومن الواضح أنه يمكن أن نكتب لهذه الطبقة معادلة توازن المادة

$$[vu]_{x_1} - [vu]_{x_2} S \Delta t = [(a + u)_{x_1} - (a + u)_{x_2}] S \Delta x, \quad (1)$$

التي تتحول بعد اختصار $\Delta x \Delta t$ والانتقال إلى النهاية عندما $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ إلى الصورة

$$-v \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (a + u). \quad (2)$$

والطرف الأيسر لهذه المعادلة هو عبارة عن كمية الغاز المتراكمة نتيجة للانتقال محسوبة في وحدة الطول والزمن . والطرف الأيمن هو كمية الغاز المستهلك في رفع تركيز الغاز الممتص والغاز الموجود في المسام . وإلى معادلة التوازن هذه يجب إضافة معادلة كينيتيكا الامتصاص

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta (u - y), \quad (3)$$

حيث β هو ما يسمى بالمعامل الكينيتيكي ، y تركيز الغاز الموجود في «اتزان» مع

كمية الغاز الممتصة . والكيتينان y, a ترتبطان ببعضهما بالمعادلة

$$a = f(y), \quad (4)$$

التي تعتبر مميزة للمادة الممتصة . والمنحنى $a = f(y)$ يسمى ايزوثرم إلامتصاص . وإذا كان

$$f(y) = \frac{y u_0}{v(u_0 + p y)},$$

فإن الايزوثرم يسمى بايزوثرم لينجميور . وأبسط صورة للدالة f تناظر ما يسمى بايزوثرم هنرى الذى يكون صحيحا فى منطقة التركيزات الصغيرة

$$a = \frac{1}{v} y, \quad (5)$$

حيث $1/v$ معامل هنرى . وفى هذه الحالة نصل إلى المسألة التالية :

عين الدالتين $u(x, t)$. $a(x, t)$ من المعادلتين

$$-v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - \gamma a) \quad (6)$$

بالشروط الإضافية

$$\left. \begin{aligned} a(x, 0) &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$u(0, t) = u_0. \quad (8)$$

حيث u_0 تركيز الغاز عند الدخول (فى الأنبوبة) .

ويإهمال المشتقة $\frac{\partial u}{\partial t}$ التى تعبر عن استهلاك الغاز لرفع التركيز الحر فى مسام المادة الماصة بالمقارنة مع المشتقة $\frac{\partial a}{\partial t}$ التى تعبر عن استهلاك الغاز على زيادة كمية الغاز الممتصة نحصل على * :

$$-v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial t}, \quad (2')$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - \gamma a), \quad (6)$$

$$a(x, 0) = 0,$$

$$u(0, t) = u_0.$$

* . لمجموعة المعادلتين (6) . (2') يكفى شرط ابتدائى واحد فقط لأن المحور $t = 0$ فى هذه الحالة يصبح

مميزة . انظر تفصيل ذلك فى هامش الصفحة ١٩٧ .

نحذف الدالة $a(x, t)$ ، بتفاضل المعادلة بالنسبة إلى t والاستعانة بالمعادلة الثانية ، نحصل على :

$$-vu_{xt} = \beta u_t - \beta \gamma a_t = \beta u_t + \beta \gamma v u_x$$

أو

$$u_{xt} + \frac{\beta}{v} u_t + \beta \gamma u_x = 0.$$

نعين الشرط الابتدائي للدالة u بوضع $t = 0$ في المعادلة الأولى

$$-vu_x(x, 0) = \beta u(x, 0), \quad u(0, 0) = u_0.$$

ومن هنا نجد أن

$$u(x, 0) = u_0 e^{-\frac{\beta}{v} x}.$$

ومسألة تعيين الدالة $u(x, t)$ آلت إلى تكامل المعادلة

$$u_{xt} + \frac{\beta}{v} u_t + \beta \gamma u_x = 0 \quad (9)$$

بالشروط الإضافية

$$u(x, 0) = u_0 e^{-\frac{\beta}{v} x}, \quad (10)$$

$$u(0, t) = u_0. \quad (8)$$

ومميزتا هذه المعادلة هما المنحنيان

$$x = \text{const}, \quad t = \text{const}.$$

والشروط الإضافية في هذه المسألة هي عبارة عن قيم الدالة المطلوب تعيينها $u(x, t)$ على للمميزات . وبالمثل تصاغ للمسألة للدالة $a(x, t)$:

$$a_{xt} + \frac{\beta}{v} a_t + \beta \gamma a_x = 0, \quad (11)$$

$$a(x, 0) = 0, \quad (7)$$

$$a(0, t) = \frac{u_0}{v} (1 - e^{-\beta \gamma t}). \quad (12)$$

وينبغي الإشارة إلى أن مثل هذه المسألة تقابلنا عند دراسة عديد من الموضوعات الأخرى (على سبيل المثال عملية التجفيف بدفق هوائى أو تسخين أنبوية بدفق مائى .. والخ *).

وحل المعادلة (9) يمكن الحصول عليه فى صورة صريحة بالطريقة المشروحة فى بند ٥ ، ويعطى بالعلاقة

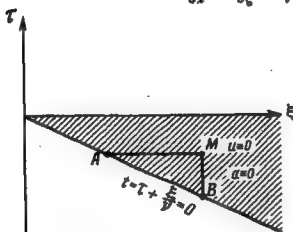
$$u(x_1, t_1) = u_0 e^{-x_1} \left[e^{-t_1 I_0(2\sqrt{x_1 t_1})} + \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1 t_1} e^{-\frac{\tau}{x_1}} I_0(2\sqrt{\tau}) d\tau \right], \quad (13)$$

بالانتقال إلى المعادلة (2') أهمنا الحد u_0 . غير أنه ليس من الصعب أن نوضح أننا ننصل إلى نفس المعادلة إذا أدخلنا المتغيرات الجديدة

$$\tau = t - \frac{x}{v}; \quad t = \tau + \frac{\xi}{v}, \quad \xi = x, \quad x = \xi$$

(شكل ٣٢) حيث يبدأ حساب الزمن عند النقطة x ابتداء من اللحظة $t_0 = x/v$ وهى لحظة وصول الخليط الغازى للغوى إلى هذه النقطة . بالفعل

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}$$



شكل ٣٢

ونأخذ لمعادلة (2) الصورة

$$-v \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial a}{\partial \tau}, \quad (2')$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \beta(u - \gamma a). \quad (6)$$

والشروط الابتدائية (7) والمعادلتان (6), (2') تعطى:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u_\xi(x, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

وفى المنطقة بين المستقيم $t = 0$ ونحور ξ نحصل على مسألة تعيين الدالة u بالشروط الابتدائية (7') (مسألة كوشى). ومن الواضح أنه فى هذه المنطقة تكون $u(x, t) = 0$ (وكذلك $a = 0$). ومن المعادلتين (6), (2') يتضح أنه عندما $\tau = 0$ يحدث للدالة $u(x, t)$ تقفالى فى حين تظل الدالة $a(x, t)$ متصلة. وبذلك فعند $\tau = 0$ تعين الدالة u كما أوضحنا فى سببق من المعادلة (2') عندما $a(x, 0) = 0$. وتعيين القيم $a(0, t)$. $u(x, 0)$ كما فعلنا ذلك فى الصفحة السابقة (انظر العلاقات (12), (10)). نحصل للدالتين $a(x, t)$, $u(x, t)$ على مسألتين بالمعطيات على الميزات.

حيث $x_1 = \frac{\beta x}{\gamma}$, $t_1 = \frac{\beta t}{\gamma}$ متغيران بلا أبعاد (dimensionless) I_0 دالة يسيل من النوع الأول من الرتبة الصفيرية في المتغير التخيلي . وبالإستعانة بالعلاقات التقاربية (asymptotical) للدالة I_0 يسهل الحصول على الصيغة التقاربية للحل لقيم المتغيرات الكبيرة .

٢ - الحل التقاربي (asymptotical solution) . درسنا أعلاه عملية امتصاص الغاز الخاضع لايذوثرم هنرى للامتصاص الذى يربط بين كمية المادة للممتصة a والتركيز الموازن (balanced) y بارتباط خطي

$$a = \frac{1}{\gamma} y.$$

ندرس ايزوثرم الامتصاص في الصورة العامة :

$$a = f(y).$$

وإذا أدخلنا متغيرات بلا أبعاد :

$$x_1 = \frac{x\beta}{\gamma}, \quad t_1 = \frac{t\beta}{\gamma}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad z = \frac{y}{u_0}, \quad v = \frac{a}{u_0\gamma},$$

فإن المجموعة (8), (7), (6), (2') تأخذ الصورة

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} &= -\frac{\partial v}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial v}{\partial t_1} &= (\bar{u} - z), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$v = f_1(z) = \frac{1}{u_0\gamma} f(zu_0) \quad (15)$$

بالشروط الإضافية

$$\bar{u}(0, t_1) = 1, \quad (16)$$

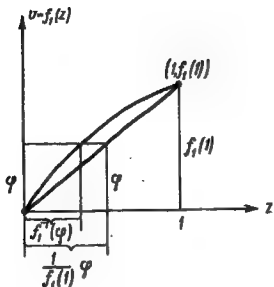
$$v(x_1, 0) = 0. \quad (17)$$

وسنتم بالسلوك التقاربي للدوال المعبرة عن حل المجموعة (14) .

بالنسبة إلى الدالة $f_1(z)$ سنفترض ما يلي :

$$(١) \quad f_1(z) \text{ دالة متزايدة و } f_1(0) = 0$$

$$(٢) \quad f_1(z) \text{ لها مشتقة متصلة لجميع قيم } z \text{ حيث } 0 \leq z \leq 1$$



شكل ٣٣

(٣) الشعاع الخارج من نقطة الأصل إلى النقطة $(1, f_1(1))$ يقع أسفل المنحنى $f_1(z)$ في الفترة $0 \leq z \leq 1$ وهو ما يتحقق كحالة خاصة للايزوثرم المحدث .

وبالرمز للدالة العكسية

$$z = f_1^{-1}(v) = F(v),$$

سنبحث عن الحل التقاربي للمسألة المصاغة في صورة موجة متشرة*

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \psi(\xi), & \xi &= x - \sigma t, \\ \bar{v} &= \varphi(\xi), \end{aligned} \quad (18)$$

حيث σ سرعة انتشار الموجة وينبغي تعيينها .

وهذا يعني أنه على المسافات الكبيرة (عند $x \rightarrow \infty$) أو بعد فترة زمنية طويلة ($t \rightarrow \infty$) يكون

$$v(x, t) = \bar{v} = \varphi(x - \sigma t); \quad \bar{u}(x, t) = \bar{u} = \psi(x - \sigma t).$$

والتركيزان \bar{u} , \bar{v} يجب عند $x = \infty$ أو $t = \infty$ أن يحققا شرط الاتزان

$$v = f_1(\bar{u}) \quad \text{أو} \quad \bar{u} = F(v)$$

ومن الشرط (16) يتبع عندئذ أن

$$\bar{u}|_{x=0} = \psi(-\infty) = 1; \quad \varphi(-\infty) = v|_{x=0} = f_1(1). \quad (19)$$

ومن الشرط (17) يتبع أن

$$v|_{x=\infty} = \varphi(+\infty) = 0; \quad \psi(+\infty) = \bar{u}|_{x=\infty} = F(0) = 0. \quad (20)$$

* لتسهيل الكتابة سنكتب x, t بدلا من x_1, t_1 .

والشرط (19) يعنى أنه عندما $t \rightarrow \infty$ ($\xi \rightarrow -\infty$) يجب أن يحدث التباعد في كل مكان .

بالتعويض بالصورة المقترحة للحل في المعادلة (14) نحصل على :

$$\psi' - \sigma\varphi' = 0, \quad (21)$$

$$-\sigma\varphi' = \psi - F(\varphi). \quad (22)$$

ومن (21) . (20) نستنتج أن

$$\psi(\xi) - \sigma\varphi(\xi) = 0. \quad (23)$$

ومن المعادلتين (19) يتبع عندئذ أن

$$\sigma = \frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi)} \Big|_{\xi=-\infty} = \frac{1}{f_1(1)} \quad (24)$$

أو في الكميات البعدية (dimensional)

$$\sigma = \gamma \frac{\mu_0}{a_0}, \quad a_0 = f(\mu_0). \quad (24')$$

ومن (22) و (23) نحصل على

$$-\sigma \frac{d\varphi}{\sigma\varphi - F(\varphi)} = d\xi. \quad (25)$$

وبعد التكامل سنحصل على

$$\omega(\varphi) = \xi - \xi_0, \quad (26)$$

حيث $\omega(\varphi)$ تكامل ما للطرف الأيسر . ξ_0 ثابت التكامل . ومن هنا فالدالة المطلوب تعيينها $\varphi(\xi)$ تعين بدقة حتى ثابت مجهول ξ_0 :

$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0), \quad (27)$$

$$\psi = \sigma\omega^{-1}(\xi - \xi_0). \quad (28)$$

نوضح هل يمكن تعيين الدالة ω^{-1} وهل تحقق الدالتان ψ . φ الشروط المطروحة عند $\xi \rightarrow -\infty$. $\xi \rightarrow \infty$. نبين أن المشتقة

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\sigma \frac{1}{\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi)} < 0, \quad (29)$$

أى

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi)$$

هى دالة متناقصة باطراد فى الدالة φ . بالفعل ، المقام فى (29) يساوى

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) = \frac{1}{f_1(1)}\varphi - f_1^{-1}(\varphi).$$

الحد الأول هو الإحداثى الأفقى المناظر للإحداثى الرأسمى φ للنقطة الواقعة على الشعاع الخارج من نقطة الأصل إلى النقطة $(1, f_1(1))$ (شكل ٣٣). وحيث إننا اصطلمنا على أن المنحنى $\varphi = f_1(z)$ يقع أعلى هذا الشعاع فإن

$$f_1^{-1}(\varphi) < \frac{1}{f_1(1)}\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq f_1(1))$$

وبالتالى فإن

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) > 0.$$

وعلاوة على ذلك

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) = 0$$

عندما $\varphi = 0$ و $\varphi = f_1(1)$. ومن هنا يتبع أن

$$\text{عند } \varphi = 0 \quad \xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = \infty$$

$$\text{عند } \varphi = f_1(1) \quad \xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = -\infty$$

وللدالة العكسية نحصل على :

$$\text{عندما } \xi = -\infty \quad \varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = f_1(1)$$

$$\text{عندما } \xi = \infty \quad \varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = 0$$

وبعد ذلك فوفقا للمساوية (29) نحصل على :

$$\text{عند } \xi = -\infty \quad \psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)}\varphi = 1$$

$$\text{عند } \xi = \infty \quad \psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)}\varphi = 0$$

وهكذا فإن الشرطين (20) ، (19) يتحققان ، وبذلك أثبتنا أن مجموعة المعادلات لها حل في صورة موجة متشرة تحتوي على ثابت غير محدد ξ_0 .
ولتعيين ξ_0 نكامل المعادلة الأولى بالنسبة إلى t بالحدود من 0 إلى t_0 وبالنسبة إلى x بالحدود من 0 إلى x_0 :

$$\left[\int_0^{x_0} \bar{u}(x_0, \tau) d\tau - \int_0^{x_0} \bar{u}(0, \tau) d\tau \right] + \left[\int_0^{x_0} v(x, t_0) dx - \int_0^{x_0} v(x, 0) dx \right] = 0. \quad (30)$$

والمساوية الناتجة تعبر عن قانون حفظ المادة . وبالاتقال إلى النهاية عندما $x_0 \rightarrow \infty$ والاستعانة بالشروط الابتدائية للدالتين \bar{u} ، v نحصل على :

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0) dx = \int_0^{t_0} \bar{u}(0, \tau) d\tau = t_0.$$

نفرض أنه لقيم t الكبيرة يقترب حل مسألتنا إلى الدالتين \bar{u} ، \bar{v} المعيتين أعلاه كموجتين متشترتين .

وإذا عينا ξ_0 من الشرط

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0) dx - t_0 \rightarrow 0 \quad (t_0 \rightarrow \infty), \quad (31)$$

فإنها ستكون هي قيمة ξ_0 تلك التي تناظر الدالتين $\bar{u}(x, t)$ ، $\bar{v}(x, t)$ نحول تكاملنا

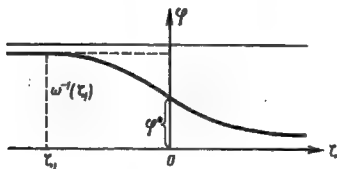
$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \bar{v}(x, t_0) dx &= \int_0^{\infty} \varphi(x - \sigma t_0) dx = \int_0^{\infty} \omega^{-1}(x - \sigma t_0 - \xi_0) dx = \\ &= \int_{-\sigma t_0 - \xi_0}^{\infty} \omega^{-1}(\xi) d\xi = \int_{\xi_1}^{\infty} \omega^{-1}(\xi) d\xi \quad \left(\begin{array}{l} \xi = x - \sigma t_0 - \xi_0 \\ \xi_1 = -\sigma t_0 - \xi_0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

نرمز بالرمز φ^* إلى قيمة $\omega^{-1}(\xi)$ عند $\xi = 0$:

$$\omega^{-1}(0) = \varphi^*.$$

وليس من الصعب أن نرى أنه إذا كانت $\varphi = \omega^{-1}(\xi)$ هي الدالة العكسية للدالة $\xi = \omega(\varphi)$ (شكل ٣٤) فإن

$$\begin{aligned} \int_{\xi_1}^{\infty} \omega^{-1}(\xi) d\xi &= \int_{\xi_1}^0 \omega^{-1}(\xi) d\xi + \int_0^{\infty} \omega^{-1}(\xi) d\xi = \\ &= \left[-\xi_1 \omega^{-1}(\xi_1) + \int_{\varphi_1}^{\omega^{-1}(\xi_1)} \omega(\varphi) d\varphi + \int_0^{\infty} \omega(\varphi) d\varphi \right]. \quad (32) \end{aligned}$$



شكل ٣٤

ومن هنا ينتج أنه بدلا من المتساوية النهائية (31) يمكن كتابة

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma t_0 - \xi_0}^{\infty} \omega^{-1}(\xi) d\xi - t_0 &= \\ &= \left\{ (\sigma t_0 + \xi_0) \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) + \int_0^{\varphi(-\sigma t_0 - \xi_0)} \omega(\varphi) d\varphi \right\} - t_0 \rightarrow 0 \quad (t_0 \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (32')$$

وبالانتقال إلى النهاية عند $t_0 \rightarrow \infty$ نحصل عندئذ على :

$$\sigma \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) \rightarrow \sigma \varphi(-\infty) = \sigma f_1(1) = 1. \quad (32'')$$

ولحساب نهاية الصيغة

$$\sigma t_0 \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) - t_0,$$

نستعين بالمعادلة (25) . بفك $f_1^{-1}(\varphi) = F(\varphi)$ في متسلسلة بجوار النقطة $\varphi_0 = f_1(1)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \sigma \varphi - F(\varphi) &= \sigma(\varphi - \varphi_0) + 1 - F(\varphi) = \\ &= \sigma(\varphi - \varphi_0) - [F(\varphi) - F(\varphi_0)] = [\sigma - F'(\varphi_0)](\varphi - \varphi_0) + \dots, \end{aligned}$$

ومن هنا ينتج أن

$$-\sigma \frac{d\varphi}{[\sigma - F'(\varphi_0)](\varphi - \varphi_0) + \dots} = d\xi_0, \quad (33)$$

حيث رمزنا بالنقط إلى الحدود من قوى أعلى بالنسبة إلى $(\varphi - \varphi_0)$.
ومن الشرط (٣) للدالة f_1 ينتج أن

$$F'(\varphi_0) > \sigma = \frac{1}{f_1(1)}.$$

ومن المعادلة (33) نعين درجة تزايد φ عندما $\xi \rightarrow -\infty$:

$$\varphi = A e^{k\xi} + \varphi_0, \quad (34)$$

حيث $A, k > 0$ ثابتان ما .

وينتج من (34) أن

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} t_0 [\sigma \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) - 1] = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} t_0 A \sigma e^{-k(\sigma t_0 + \xi_0)} = 0. \quad (32'')$$

وبالانتقال إلى النهاية في العلاقة (32') عندما $t_0 \rightarrow \infty$ مع أخذ العلاقتين (32'') و (32''') في عين الاعتبار نحصل على:

$$\xi_0 = -\frac{1}{f_1(1)} \int_0^{f_1(1)} \omega(\varphi) d\varphi. \quad (35)$$

وبذلك فالمقاطع الجانبية للموجة $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ تكون قد حددت تماما .

وتشكل حالة ايزوثرم لينجميور أهمية خاصة . نعين الحل التقاربي لعملية الانتصاف الخاضعة لايزوثرم لينجميور .

المعادلة (25) تأخذ الصورة

$$-\sigma \frac{d\varphi}{\sigma\varphi - \frac{\varphi}{1-p}} = d\xi_0, \quad (36)$$

حيث $\sigma = \frac{1}{f_1(1)} = 1 + p$ سرعة الموجة . ومن (36) نجد أن :

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi),$$

حيث

$$\omega(\varphi) = \sigma \int \frac{(1-p\varphi) d\varphi}{\varphi - \sigma\varphi(1-p\varphi)} + A = \frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\frac{1}{\sigma} \ln(\sigma-1-p\sigma\varphi) - \ln \varphi \right] + A.$$

من الواضح أنه عندما تتغير φ من الصفر إلى $f_1(1)$ فإن $\omega(\varphi)$ تتغير من $-\infty$ إلى $+\infty$ نختار A بحيث يكون

$$\varphi^* = \frac{1}{2} f_1(1),$$

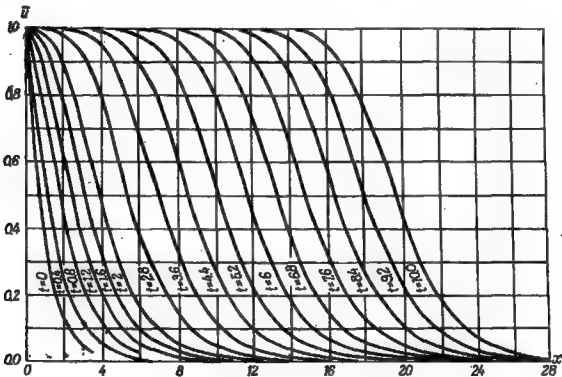
أي بحيث يكون

$$\varphi^* = \frac{1}{2} f_1(1) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+p} \text{ عندما } \omega(\varphi^*) = 0$$

وعند هذا الشرط يكون

$$A = -\frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{1}{2} p\right) - \ln\left(\frac{1}{2} \frac{1}{1+p}\right) \right]$$

$$\omega(\varphi) = \frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\frac{1}{\sigma} \ln 2(1-\sigma\varphi) - \ln 2(1+p)\varphi \right].$$



شكل ٣٥

وقية ξ_0 تتحدد بالعلاقة

$$\xi_0 = -\frac{1}{f_1(1)} \int_0^{f_1(0)} \omega(\varphi) d\varphi = \ln 2 - 1$$

ولا تعتمد على $p = u_0/y$ أى على التركيز المعطى .

والحل التقاربى المطلوب يكون على الصورة :

$$\begin{aligned} \bar{v}(x, t) &= \omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \\ \bar{u}(x, t) &= \sigma \omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \end{aligned} \quad (37)$$

حيث $\omega^{-1}(\xi)$ الدالة العكسية للدالة $\omega(\varphi)$.

وفى شكل ٣٥ بينت نتائج عملية التكامل العددى للمعادلات (14) لايوزنرم لينجميور بطريقة الفروق المحدودة . وهذه المنحنيات معطاة للقيم $0 < t \leq t_1 = 10$ وعند $t = t_1$ تنطبق نتائج التكامل العددى على الحل التقاربى بدقة حتى 1% . وللقيم $t > t_1$ يمكن الاستعانة بالعلاقات التقاربية .

ملحق ٦ - التشابهات الفيزيائية

عند دراسة الظواهر فى مختلف مجالات علم الفيزياء كثيرا ما نكتشف ملامح مشتركة فى هذه الظواهر . ويؤدى ذلك إلى الحصول عند الصياغة الرياضية للمسائل على معادلات واحدة تصف الظواهر الفيزيائية المختلفة . وأبسط مثال على هذه المعادلات يمكن أن تكون المعادلة

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + bx = 0,$$

التي تصف عمليات ذبذبية مختلفة للمجموعات البسيطة : البندول الرياضى ، ذبذبة ثقل تحت تأثير قوة مرونة الزنبرك ، الذبذبات الكهربائية فى دائرة بسيطة بملف حث ذاتى وسعة... الخ . وعمومية المعادلات للعمليات الفيزيائية المختلفة تكفل على أساس دراسة خواص إحدى الظواهر الخروج باستنتاجات عن خواص ظاهرة أخرى قد تكون قد درست أقل من الأولى . فعلى سبيل المثال يمكن تسهيل

دراسة مختلف الظواهر الصوتية إلى حد كبير بالدراسة المسبقة للدوائر الكهربائية المناظرة .

وانتشار الذبذبات الكهربائية في المجموعات ذات الثوابت الموزعة يوصف كما هو معلوم بالمعادلات التلغرافية

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial I}{\partial x} &= C \frac{\partial V}{\partial t} + GV, \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= L \frac{\partial I}{\partial t} + RI, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

حيث C, G, L, R السعة والتسرب والحث الذاتي والمقاومة الموزعة للمجموعة . وإذا أمكن إهمال المقاومة وتسرب التيار نحصل للدالتين V, I على معادلتين موجبتين عاديتين :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned}$$

والمعادلتان (1) تأخذ الصورة

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial I}{\partial x} &= C \frac{\partial V}{\partial t}, \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= L \frac{\partial I}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

وعند حل مسألة انتشار الصوت في اتجاه ما وعلى سبيل المثال عند دراسة حركة الهواء في الأنابيب نصل إلى المعادلتين

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\tau} \frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

حيث v سرعة الجسيمات المتذبذبة ، ρ الكثافة ، p الضغط ، $\tau = \rho v$ معامل مرونة الهواء .

ويكفل التشابه بين المعادلتين (3) ، (2) توضيح التناظر بين الكميات الصوتية والكهربائية . ففرق الجهد يناظر الضغط ، والتيار يناظر سرعة حركة الجسيمات ، والكثافة التي تحدد الخواص القصورية للغاز تناظر الحث الذاتي للدائرة الكهربائية ، وسعة الدائرة الكهربائية تناظر $1/c$ أى مقلوب معامل المرونة . ونفس هذه التناظرات يمكن تعيينها من صيغ طاقات الوضع والحركة للمجموعتين الكهربائية والصوتية .

وبالعودة إلى المعادلتين (1) يمكننا أن نعين التناظرين الصوتيين للمقاومة والتسرب . ونضطر لأخذ مقدار المقاومة الصوتية في الاعتبار في تلك الحالات عندما يكون احتكاك الغاز يحدران الزعاء جوهريا في دراسة حركة الغاز . وبالتناظر مع المقاومة الكهربائية التي تحدد كنسبة الجهد إلى التيار يمكن تعريف المقاومة الصوتية بوصفها نسبة الضغط إلى التيار في الوسط والذي يتناسب مع سرعة حركة جسيمات الغاز ، $R_A = p/uv$. وفي تلك الحالات عندما تدرس حركة الغاز في وسط مسامي نضطر إلى إدخال مقدار مماثل للتسرب في الدوائر الكهربائية . وهذا المقدار الذي يرمز له بالحرف P يسمى بالمسامية (porosity) ويتحدد بالجزء من حجم المادة الذي يكون مملوءا بالهواء .

والتناظر الميكانيكي للمعادلة التلغرافية هو معادلة الذبذبات الطولية للقصيب التي يمكن كتابتها مثل المعادلتين (2) على الصورة :

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\frac{\partial T}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t},$$

حيث T شد القصيب ، v سرعة النقط المتذبذبة ، ρ الكثافة ، h معامل مرونة القصيب .

ومقارنة هاتين المعادلتين بالمعادلة (2) يمكننا تعيين التناظر بين الكميات الميكانيكية والكهربائية . فتعيين التناظر بين الجهد الكهربائي وشد الوتر ، والتيار وسرعة حركة الجسيمات ، نحصل على أن مقلوب معامل المرونة يناظر السعة ، والكثافة تناظر الحث الذاتي . وبذلك فإن دراسة المسائل الديناميكية المتشابهة

تؤدي إلى تعيين التناظر بين عدة كميات كهربائية وصوتية وميكانيكية . وهذا التناظر يمكن توضيحه بالجدول التالي :

المجموعة الكهربائية	المجموعة الصوتية	المجموعة الميكانيكية	
المتغيرات	V الجهد I التيار q الشحنة	p الضغط v سرعة الجسيمات u الإزاحة	T الشد (القوة) x سرعة الحركة x الإزاحة
البارامترات	L الحث C السعة R المقاومة	ρ القصور (الكثافة) السعة الصوتية $C_A = 1/c$ R_A المقاومة الصوتية	ρ_m كثافة الكتلة $C_M = 1/k$ اللبونة R_M المقاومة الميكانيكية

وهذه التصورات المطورة أعلاه تكفل في كثير من المسائل الصوتية الحصول على بعض المعلومات عن طبيعة الظواهر قبل حل المسائل .
فمثلاً مسائل حركة الهواء في المسام للموجات التوافقية البسيطة تؤدي إلى المعادلتين

$$-i\omega\rho_m u + ru = -\text{grad } p,$$

$$\Delta p + i \frac{\gamma P_0}{\rho c^2} (r - i\omega\rho_m) p = 0,$$

حيث u السرعة الحجمية للهواء خلال المسام ، p الضغط ، ρ الكثافة ، ρ_m الكثافة الفعالة للهواء في المسام التي قد تكون أكبر من ρ لأنه في المسام يمكن أن تتذبذب مع الهواء جسيمات المادة أيضاً . و p المسامية ، ω ، c سرعة وتردد الصوت ، $r = R_A$ مقاومة التيار التي تميز هبوط الضغط في المادة . وبوضع $r = R_A$ ، نحصل على معادلتين في الصورة :

$$L_A \frac{\partial u}{\partial t} + R_A u = -\text{grad } p,$$

$$C_A L_A \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + C_A R_A \frac{\partial p}{\partial t} = \Delta p.$$

وهاتان المعادلتان تشييان معادلتى انتشار الذبذبات الكهربائية فى الخط (الموصل) .
ولذا فالتناظر مع المقاومة الموجية للخط

$$Z = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}$$

يمكننا فوراً أن نكتب صيغة المقاومة التى تسمى بالمعاوقة (impedance) المميزة للمادة المسامية :

$$Z = c \sqrt{\rho} \sqrt{\frac{\rho_0 - i \frac{r}{\omega}}{\gamma \rho}},$$

باعتبار $G = 0$ عند ذلك . وتشير صيغة المعاوقة المميزة إلى تخميد الموجات المنتشرة فى المادة المسامية .

والتناظر المعين بين الظواهر الكهربائية والصوتية يكفل استبدال دراسة عديد من المسائل الصوتية بدراسة الدوائر الكهربائية المناظرة .

وقد وجدت طريقة التشابه فى الآونة الأخيرة تطبيقاً على نطاق واسع فى الأجهزة الحاسبة الألكترونية للنمذجة . فلحل معادلة تناظر عملية فيزيائية ما تكون فى هذه الآلات الدائرة الكهربائية المكافئة .

الباب الثالث

المعادلات من النمط المكافئ

إن المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية من النمط المكافئ تقابلنا أكثر ما يمكن عند دراسة عمليات التوصيل الحرارى والانتشار. وأبسط معادلة من النمط المكافئ وهى

$$u_{xx} - u_y = 0 \quad (y = a^2 t)$$

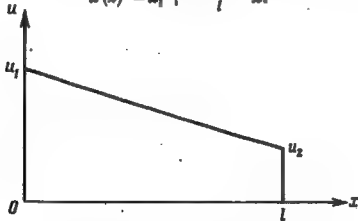
تسمى عادة بمعادلة التوصيل الحرارى.

بند ١ - المسائل المبسطة التى تؤدى إلى معادلات

من النمط المكافئ. صياغة المسائل الحدية

فقرة ١ : المسألة الخطية لانتشار الحرارة. ندرس قضيباً متجانساً طوله l معزولاً حرارياً من الجوانب ورفيقاً بشكل كاف لكى يمكن فى أية لحظة زمنية اعتبار درجة الحرارة واحدة فى جميع نقط المقطع العرضى. وإذا احتفظنا بطرفى القضيب عند درجتى حرارة ثابتتين u_1 , u_2 فإنه كما نعلم جيداً يحدث على امتداد القضيب توزيع خطى لدرجة الحرارة (شكل ٣٦)

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x. \quad (1)$$



شكل ٣٦

وعند ذلك تسرى الحرارة من الطرف الأكثر سخونة إلى الطرف الأقل سخونة .
وكمية الحرارة السارية خلال مقطع القضيب الذى مساحته S فى وحدة الزمن
تعطى بالقانون التجريبي (الناتج من التجارب العملية) :

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} S = -k \frac{\partial u}{\partial x} S, \quad (2)$$

حيث k معامل التوصيل الحرارى الذى يعتمد على مادة القضيب .
ويعتبر مقدار الدفع الحرارى موجبا إذا كانت الحرارة تسرى فى ناحية
تزايد x .

ندرس عملية انتشار الحرارة فى القضيب . وهذه العملية يمكن وصفها بالدالة
 $u(x, t)$ المعبرة عن درجة الحرارة فى المقطع x فى اللحظة الزمنية t . نعين المعادلة
التي يجب أن تحققها الدالة $u(x, t)$. ولهذا الغرض نصيغ القوانين الفيزيائية التي
تحدد العمليات المرتبطة بانتشار الحرارة .

١ - قانون فورييه . إذا كانت درجة حرارة الجسم غير منتظمة فإنه ينشأ فيه
دفع حراري متجه من الأماكن ذات درجات الحرارة الأعلى إلى الأماكن ذات
درجات الحرارة الأكثر انخفاضاً .

وكمية الحرارة السارية فى المقطع x خلال الفترة الزمنية $(t, t + dt)$ تساوى

$$dQ = qS dt, \quad (3)$$

حيث

$$q = -k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

هى كثافة الدفع الحرارى المساوية لكمية الحرارة السارية فى وحدة الزمن خلال
مساحة قدرها 1 cm^2 . وهذا القانون هو عبارة عن تعميم للعلاقة (2) . ويمكن
أيضاً إعطاؤه صورة تكاملية :

$$Q = -S \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt, \quad (5)$$

حيث Q كمية الحرارة السارية فى الفترة الزمنية (t_1, t_2) خلال المقطع x . وإذا
كان القضيب غير متجانس فإن k تكون دالة فى x .

٢- كمية الحرارة التي يجب إكسابها للجسم المتجانس لرفع درجة حرارته بمقدار Δu تساوى

$$Q = cm\Delta u = cpV\Delta u, \quad (6)$$

حيث c السعة الحرارية النوعية ، m كتلة الجسم ، ρ كثافته ، V الحجم .
وإذا كان تغير درجة الحرارة ذا قيمة مختلفة في المناطق المختلفة للقضيب أو إذا كان القضيب غير متجانس فإن

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} cpS \Delta u(x) dx. \quad (7)$$

٣- داخل القضيب يمكن أن تنشأ أو تمتص الحرارة (على سبيل المثال عند مرور تيار أو نتيجة لتفاعلات كيميائية .. الخ) . ويمكن تمييز انبعاث الحرارة بكثافة المصادر الحرارية $F(x, t)$ في النقطة x في اللحظة t . ونتيجة لتأثير هذه المصادر تنبعث على منطقة القضيب $(x, x+dx)$ خلال الفترة الزمنية $(t, t+dt)$ كمية حرارة تساوى

$$dQ = SF(x, t) dx dt \quad (8)$$

أو في الصورة التكاملية

$$Q = S \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt, \quad (9)$$

حيث Q كمية الحرارة المنبعثة على جزء القضيب (x_1, x_2) خلال الفترة الزمنية (t_1, t_2) .

ونتج معادلة التوصيل الحرارى بحساب توازن الحرارة في جزء ما (x_1, x_2) خلال فترة زمنية ما (t_1, t_2) . وبتطبيق قانون حفظ الطاقة والاستعانة بالعلاقات (9) ، (7) ، (5) يمكن كتابة التساوية

• إذا كانت الحرارة تثبت مثلاً نتيجة مرور تيار كهربائى قوته I فى القضيب الذى مقاومته فى وحدة الطول تساوى R فإن $R = 0.24 \cdot I^2 R$.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_1} \right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ = \int_{x_1}^{x_2} c\rho [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi, \quad (10)$$

التي تعتبر معادلة التوصيل الحرارى فى الصورة التكاملية .

وللحصول على معادلة التوصيل الحرارى فى الصورة التفاضلية نفرض أن الدالة $u(x, t)$ لها المشتقتان المتصلتان u_x, u_{xx} .

وبالاستعانة بنظرية القيمة المتوسطة نحصل على المساوية

$$\left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_1} \right]_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} \Delta x + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t = \\ = [c\rho [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]]_{\xi=x_2} \Delta x, \quad (11)$$

التي يمكن تحويلها بواسطة نظرية التغيرات المحدودة إلى الصورة

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]_{x=x_2}^{\substack{x=x_2 \\ t=t_2}} \Delta x \Delta t + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t = \\ = \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]_{\substack{x=x_2 \\ t=t_2}} \Delta x \Delta t, \quad (12)$$

حيث (t_1, t_2) , (x_1, x_2) نقط وسطية فى الفترتين $t_3, t_4, t_5, x_3, x_4, x_5$.

ومن هنا نحصل بعد اختصار $\Delta x \Delta t$ على :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{\substack{x=x_2 \\ t=t_2}} + F(x, t) \Big|_{\substack{x=x_4 \\ t=t_4}} = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\substack{x=x_2 \\ t=t_2}}. \quad (13)$$

وكل هذه التحليلات تتعلق بفترتين اختياريتين (t_1, t_2) , (x_1, x_2) . وبالاتقال إلى

النهاية عندما $t_1, t_2 \rightarrow t$, $x_1, x_2 \rightarrow x$ نحصل على المعادلة

• باسـتـراط قابلية الدالة $u(x, t)$ للتفاضل يمكن بوجه عام أن نفقد عدة حلول ممكنة تحقق المعادلة التكاملية ولكنها لا تحقق المعادلة التفاضلية . غير أنه فى حالة معادلة التوصيل الحرارى لن نفقد باسـتـراط قابلية الجـل للتفاضل أية حلول ممكنة لأنه يمكن إثبات أنه إذا كانت الدالة تحقق المعادلة (10) فهي حتماً تكون قابلة للتفاضل .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (14)$$

التي تسمى معادلة التوصيل الحرارى .

ندرس عدة حالات خاصة .

١ - إذا كان القضيب متجانساً فإنه يمكن اعتبار k, c, ρ ثوابت وتكتب المعادلة عادة على الصورة :

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho}.$$

حيث a^2 ثابت يسمى بمعامل توصيل درجة الحرارة . وإذا انعدمت مصادر الحرارة أى كانت $F(x, t) = 0$ فإن معادلة التوصيل الحرارى تأخذ الصورة البسيطة التالية :

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (14')$$

٢ - كثافة المصادر الحرارية قد تعتمد على درجة الحرارة . وفي حالة التبادل الحرارى مع الوسط المحيط الذى يخضع لقانون نيوتن تكون كمية الحرارة التى يفقدها القضيب* فى وحدة الأطوال ووحدة الزمن مساوية

$$F_0 = h(u - \theta),$$

حيث $\theta(x, t)$ درجة حرارة الوسط المحيط ، h معامل التبادل الحرارى . وبذلك فإن كثافة المصادر الحرارية فى النقطة x فى اللحظة الزمنية t تساوى

$$F = F_1(x, t) - h(u - \theta), \quad (15)$$

حيث $F_1(x, t)$ هى كثافة المصادر الحرارية الأخرى .

وإذا كان القضيب متجانساً فإن معادلة التوصيل الحرارى مع التبادل الحرارى الجانبي تكون على الصورة التالية :

* حيث إن توزيع درجات الحرارة فى المقطع لا يؤخذ فى الاعتبار فى تقريبنا فإن تأثير المصادر السطحية يكافئ تأثير مصادر الحرارة الحجمية .

$$u_t = a^2 u_{xx} - au + f(x, t),$$

حيث $a = \frac{h}{cp}$ و $f(x, t) = \alpha \theta(x, t) + \frac{F_1(x, t)}{cp}$ دالة معلومة .

٣- المعاملان k و c يعتبران كقاعدة دالتين تتغيران ببطء بتغير درجة الحرارة . ولذا فإن الافتراض السابق بثبات هذين المعاملين يكون ممكناً فقط بشرط دراسة فترات غير كبيرة من فترات تغير درجة الحرارة . ودراسة العمليات الحرارية في فترة كبيرة لتغير درجة الحرارة تؤدي إلى معادلة شبه خطية (quasi-linear) للتوصيل الحراري تكسب للوسط غير المتجانس في الصورة :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = C(u, x) \rho(u, x) \frac{\partial u}{\partial t}$$

(انظر الملحق ٣) .

فقرة ٢ : معادلة انتشار الغازات (diffusion of gases) . إذا كان الوسط مملوءاً بالغاز بصورة غير منتظمة فإنه تتحقق ظاهرة انتشاره من المكان حيث تركيز الغاز أكبر إلى الأماكن حيث التركيز أقل . وهذه الظاهرة تتحقق أيضاً للمحاليل إذا كان تركيز المادة المذابة في الحجم غير ثابت .

ندرس عملية الانتشار في أنبوبة مجوفة أو في أنبوبة مملوءة بمادة مسامية مع افتراض أن تركيز الغاز (المحلول) في مقطع الأنبوبة في أي لحظة زمنية واحد . وعندئذ فإن عملية الانتشار يمكن وصفها بالدالة $u(x, t)$ التي تعبر عن التركيز في المقطع t في اللحظة الزمنية x .

ووفقاً لقانون نرنست تكون كتلة الغاز المتسرب خلال المقطع x في الفترة الزمنية $(t, t + \Delta t)$ مساوية

$$dQ = -D \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) S dt = W S dt,$$

$$W = -D \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (16)$$

حيث D معامل الانتشار ، S مساحة مقطع الأنبوبة ، $W(x, t)$ كثافة التدفق الانتشاري المساوية لكتلة الغاز المتسرب في وحدة الزمن خلال وحدة المساحة .

ووفقاً لتعريف التركيز فإن كمية الغاز في الحجم V تكون مساوية :

$$Q = uV;$$

ومن هنا نحصل على أن تغير كتلة الغاز في منطقة الأنبوبة (x_1, x_2) عند تغير التركيز بمقدار Δu يساوى :

$$\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} c(x) \Delta u \cdot S dx,$$

حيث $c(x)$ معامل المسامية* .

نكون معادلة توازن كتلة الغاز في المنطقة (x_1, x_2) خلال الفترة الزمنية (t_1, t_2) :

$$\begin{aligned} S \int_{t_1}^{t_2} \left[D(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) - D(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, \tau) \right] d\tau = \\ = S \int_{x_1}^{x_2} c(\xi) [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi. \end{aligned}$$

ومن هنا وكما في الفقرة ١ نحصل على المعادلة

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) = c \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (17)$$

التي تعتبر معادلة الانتشار . وهي ماثلة تماماً لمعادلة التوصيل الحرارى . وعند استنباط هذه المعادلة اعتبرنا أنه لا توجد في الأنبوبة مصادر للمادة وينعدم الانتشار خلال جدران الأنبوبة . ويؤدى الأخذ في الاعتبار لهذه الظواهر إلى معادلتين مشابھتين للمعادلتين (15) , (14) (انظر الكتاب الثانى . الباب الثانى - بند ٢ ، فقرة ٣) .

وإذا كان معامل الانتشار ثابتاً تأخذ معادلة الانتشار الصورة التالية :

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{حيث} \quad a^2 = D/c.$$

وإذا كان معامل المسامية $c = 1$ وكان معامل الانتشار ثابتاً فإن معادلة الانتشار تأخذ الصورة

$$u_t = D u_{xx}.$$

فقرة ٣ : انتشار الحرارة في الفراغ . إن عملية انتشار الحرارة في الفراغ يمكن تحديدها بدرجة الحرارة $u(x, y, z, t)$ التي تعتبر دالة في x, y, z, t .

* إن معامل المسامية هو نسبة حجم المياح إلى الحجم الكلى V_0 الذى يساوى في حالتنا $S dx$.

وإذا كانت درجة الحرارة غير ثابتة فإنه تنشأ دفوق حرارية تتجه من الأماكن حيث درجات الحرارة الأعلى إلى الأماكن حيث درجة الحرارة المنخفضة .

نفرض أن $d\sigma$ مساحة صغيرة ما تحيط بالنقطة $P(\xi, \eta, \zeta)$ والعمودى عليها n . وكمية الحرارة المارة خلال $d\sigma$ فى وحدة الزمن تساوى وفقاً لقانون فورييه :

$$W_n d\sigma = (Wn) d\sigma = -k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma,$$

حيث k معامل التوصيل الحرارى ، $\partial u / \partial n$ المشتقة فى اتجاه العمودى n على $d\sigma$ التى تساوى

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n, z) = (\text{grad } u, n).$$

وكثيراً ما يكتب قانون فورييه فى الصورة :

$$W = -k \text{grad } u,$$

حيث W متجه كثافة الدفق الحرارى .

وإذا كان الوسط ايزوتروپيا (متشابهاً isotropic) فإن k يكون كمية مقياسية (scalar) . وفى حالة الوسط الايزوتروپى يكون k ممتداً (tensor) ويكون متجه الدفق الحرارى W هو عبارة عن حاصل ضرب الممتد k فى المتجه $\text{grad } u$. - وسندرس فقط الأوساط الايزوتروپية .

نتقل إلى استنباط معادلة التوصيل الحرارى فى الفراغ .

ندرس حجماً ما V محدوداً بالسطح S . وتكون معادلة توازن الحرارة للحجم V خلال الفترة الزمنية $t_1 = t_1 - t_2$ على الصورة :

$$\begin{aligned} \iiint_V c_p [u(P, t_2) - u(P, t_1)] dV_P = \\ = - \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S W_n d\sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\iiint_V F(P, t) dV_P \right). \quad (18) \end{aligned}$$

حيث $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ نقطة التكامل ، $dV_P = d\xi d\eta d\zeta$ عنصر الحجم ، c_p السعة الحرارية لوحدة الحجم ، W_n المركبة العمودية لكثافة الدفق الحرارى .

وهذه المعادلة تعبر عن قانون حفظ الحرارة في الحجم V خلال الفترة الزمنية Δt :
تغير كمية الحرارة في الحجم V خلال الفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$ (الطرف الأيسر
في (18)) ينتج بسبب دفق الحرارة خلال السطح الحدي S (الحد الأول في
الطرف الأيمن للمعادلة (18)) وكذلك بكمية الحرارة المنبعثة في الحجم V خلال
الفترة الزمنية Δt نتيجة لتأثير المصادر الحرارية .

وللانتقال من المعادلة التكاملية للتوازن إلى المعادلة التفاضلية ، نفرض أن
الدالة $u(M, t) = u(x, y, z, t)$ قابلة للتفاضل مرتين بالنسبة إلى x, y, z ومرة
وحدة بالنسبة إلى t وأن هذه المشتقات تكون متصلة في المنطقة محل الدراسة .
وعندئذ يمكن الاستعانة بعلاقة وستروجرادسكي :

$$\iiint_V W_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} W dV$$

وتحويل معادلة التوازن إلى الصورة :

$$\begin{aligned} \iiint_V cp [u(P, t_2) - u(P, t_1)] dV_P = \\ = - \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \operatorname{div} W dV_P dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V F(P, t) dV_P dt. \end{aligned}$$

(سنفرض أن $F(P, t)$ دالة متصلة في متغيراتها) .

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة ونظرية التغيرات المحدودة للدوال في عدة
متغيرات نحصل على :

$$cp \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \Delta t \cdot V = - \operatorname{div} W \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \Delta t \cdot V + F \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \Delta t \cdot V,$$

حيث t_1, t_2, t_3 نقاط وسطية في الفترة Δt ، P_1, P_2, P_3 ، P_1, P_2, P_3 نقاط في الحجم V .
نثبت نقطة ما $M(x, y, z)$ داخل الحجم V ونضبط (نجمع) الحجم V في هذه
النقطة ونجعل Δt نقول إلى الصفر . وبعد اختصار $\Delta t V$ والانتقال إلى النهاية كما
ذكرنا نحصل على :

$$cp \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) = - \operatorname{div} W(x, y, z, t) + F(x, y, z, t).$$

وبالتعويض عن W من العلاقة $W = -k \text{ grad } u$ نحصل على المعادلة التفاضلية للتوصيل الحرارى

$$cp u_t = \text{div}(k \text{ grad } u) + F$$

أو

$$cp u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F.$$

وإذا كان الوسط متجانساً فإن هذه المعادلة تكتب عادة في الصورة

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{F}{cp},$$

حيث $a^2 = k/cp$ معامل توصيل درجة الحرارة ، أو

$$u_t = a^2 \Delta u + f \quad \left(f = \frac{F}{cp} \right),$$

حيث $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ مؤثر لابلاس .

فقرة 4 : صياغة المسائل الحدية . للحصول على حل وحيد لمعادلة التوصيل الحرارى يلزم أن نضيف إلى المعادلة الشروط الابتدائية والشروط الحدية .

والشروط الابتدائية ، على خلاف المعادلة على النمط الزائدى ، ينحصر فقط في إعطاء قيم الدالة $u(x, t)$ في اللحظة الابتدائية t_0 . والشروط الحدية يمكن أن تختلف وفقاً للنظام الحرارى على الحدود . وتدرس ثلاثة أنماط أساسية للشروط الحدية .

١ - في نهاية القضيب $x = 0$ معطاة درجة الحرارة

$$u(0, t) = \mu(t),$$

حيث $\mu(t)$ دالة معطاة في فترة ما $t_0 \leq t \leq T$ علماً بأن T هي الفترة الزمنية التى خلالها تم دراسة العملية .

٢ - في نهاية القضيب $x = l$ معطاة قيمة المشتقة

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = v(t).$$

ونصل إلى هذا الشرط ، إذا أعطى مقدار الدفق الحرارى $Q(l, t)$ السارى خلال المقطع الطرفى للقضيب

$$Q(l, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(l, t),$$

ومن هنا $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = v(t)$ ، حيث $v(t)$ دالة معلومة يعبر عنها بدلالة الدفق المعطى $Q(l, t)$ بالعلاقة

$$v(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}.$$

٣- فى الطرف $x = l$ معطاة علاقة خطية بين المشتقة والدالة

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda [u(l, t) - \theta(t)].$$

وهذا الشرط الحدى يتاظر التبادل الحرارى وفقاً لقانون نيوتن على سطح الجسم مع الوسط المحيط الذى تكون درجة حرارته θ معلومة . وبلاستعانة بصيغتي الدفق الحرارى السارى خلال المقطع $x = l$

$$Q = h(u - \theta)$$

و

$$Q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$$

نحصل على الصياغة الرياضية للشرط الحدى الثالث فى الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda [u(l, t) - \theta(t)],$$

حيث $\lambda = h/k$ معامل التبادل الحرارى ، $\theta(t)$ دالة ما معطاة . وللطرف $x = 0$ من القضيب $(0, l)$ يكون الشرط الحدى الثالث على الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda [u(0, t) - \theta(t)].$$

والشروط الحدية عند $x = 0$ ، $x = l$ يمكن أن تكون من أنماط مختلفة ومن ثم فعدد المسائل المختلفة يكون كبيراً .

والمسألة الحدية الأولى تنحصر فى تعيين الحل $u = u(x, t)$ لمعادلة التوصيل الحرارى

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T \quad \text{و} \quad u_t = a^2 u_{xx}$$

الذى يحقق الشروط

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

حيث $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ دوال معطاة .

وبالمثل نصاغ المسائل الحدية الأخرى بتركيبات مختلفة من الشروط الحدية عند $x=0$, $x=l$. ومن الممكن وجود شروط حدية من نط أكثر تعقيداً من الأنماط التى سبق بحثها .

نفرض على سبيل المثال أنه وضعت عند الطرف $x=0$ للقصيب سعة حرارية مركزة C_1 (على سبيل المثال جسم ذو توصيل حرارى كبير ، حيث يمكن اعتبار درجة الحرارة فى كل الجسم ثابتة) وأنه يحدث تبادل حرارى مع الوسط الخارجى وفقاً لقانون نيوتن . عندئذ يكون الشرط الحدى عند $x=0$ (الذى يعبر عن معادلة التوازن الحرارى) على الصورة :

$$C_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_0),$$

حيث u_0 درجة حرارة الوسط الخارجى . وهذا الشرط يحتوى على المشتقة $\frac{\partial u}{\partial t}$ (أو $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ إذا أخذنا فى الاعتبار أن $u_t = a^2 u_{xx}$).

وإذا كان الوسط غير متجانس ومعاملات المعادلة عبارة عن دوال منفصلة فإن الفترة $(0, t)$ حيث يبحث عن الحل ، تقسم بنقط انفصال المعاملات إلى عدة أجزاء داخلها تحقق الدالة u معادلة التوصيل الحرارى وعلى حدودها تحقق شروط التوافق .

وفى الحالة المبسطة تنحصر هذه الشروط فى اتصال درجة الحرارة واتصال التدفق الحرارى

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t),$$

$$k(x_i - 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i - 0, t) = k(x_i + 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i + 0, t),$$

حيث x_i نقط انفصال المعاملات .

وعلاوة على المسائل المذكورة هنا كثيراً ما تقابلنا الحالات النهائية لهذه المسائل . ندرس عملية التوصيل الحرارى فى قضيب طويل للغاية . وفى خلال فترة زمنية غير كبيرة يكون تأثير نظام درجة الحرارة المعطى على الحدود (على طرفى القضيب) تأثيراً ضعيفاً للغاية فى الجزء الأوسط للقضيب فدرجة الحرارة فى هذا الجزء تتحدد أساساً بالتوزيع الابتدائى لدرجة الحرارة فقط . وفى هذه الحالة فإن الحساب الدقيق لطول القضيب لا يكون له قيمة ، لأن تغير طول القضيب لا يحدث تأثيراً جوهرياً على درجة الحرارة فى المنطقة التى نهتمنا . وفى المسائل على مثل هذا النمط يعتبر القضيب لانهاى الطول . وهذا الشكل تطرح المسألة بالشروط الابتدائية (مسألة كوشى) عن توزيع درجة الحرارة على مستقيم لانهاى :

عين حل معادلة التوصيل الحرارى فى المنطقة $-\infty < x < \infty$. $t \geq t_0$ ،
الذى يحقق الشرط

$$u(x, t_0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

حيث $\varphi(x)$ دالة معطاة .

وبالمثل ، إذا كان جزء القضيب الذى نهتم بدرجة حرارته يوجد بالقرب من أحد طرفى القضيب بعيداً عن الطرف الآخر فإن درجة الحرارة فى هذه الحالة تتحدد عملياً بنظام درجة حرارة الطرف الأقرب وبالشروط الابتدائية . وفى المسائل على مثل هذا النمط يعتبر القضيب عادة نصف لانهاى والإحداثى المحسوب ابتداء من طرف القضيب يتغير فى الحدود $0 \leq x < \infty$. نورد كمثال صياغة المسألة الحدية للقضيب نصف اللانهاى :

عين حل معادلة التوصيل الحرارى فى المنطقة $0 < x < \infty$. $0 \leq t \leq t_0$ الذى يحقق الشرطين :

$$\left. \begin{aligned} u(x, t_0) &= \varphi(x) \quad (0 < x < \infty), \\ u(0, t) &= \mu(t) \quad (t \geq t_0), \end{aligned} \right\}$$

حيث $\mu(t)$ ، $\varphi(x)$ دالتان معطاتان .

والمسائل الواردة أعلاه هي عبارة عن حالة نهائية (انحلال degeneration) للمسائل الحدية الأساسية. ومن الممكن وجود حالات نهائية للمسألة الحدية من نمط آخر عندما يهمل الحساب الدقيق للشروط الابتدائية. فتأثير الشروط الابتدائية عند انتشار الحرارة في القضيب يضعف بمرور الوقت. فإذا كانت اللحظة التي نهمنا بعيدة بقدر كاف عن اللحظة الابتدائية فإن درجة الحرارة تتحدد عملياً بالشروط الحدية لأن تغير الشروط الابتدائية لن يغير حالة درجة الحرارة في القضيب في حدود دقة الملاحظة. وفي هذه الحالة يمكن عملياً أن نعتبر أن التجربة تستمر زمناً طويلاً لانهايتياً ومن ثم تسقط الحاجة إلى الشروط الابتدائية.

وبذلك نتوصل إلى المسائل الحدية بدون شروط ابتدائية عندما يبحث عن حل معادلة التوصيل الحرارى للفترة $0 \leq x \leq l$ و $-\infty < t$ - الذى يحقق الشرطين

$$u(0, t) = \mu_1(t),$$

$$u(l, t) = \mu_2(t).$$

ووفقاً لطبيعة النظام الحدى من الممكن صياغة صور أخرى من المسائل بدون شروط ابتدائية.

وتعتبر هامة على وجه الخصوص المسألة بلا شروط ابتدائية للقضيب نصف اللانهائى ($l = \infty$) ، عندما يطلب تعيين حل معادلة التوصيل الحرارى للفترة $-\infty < t < \infty$ و $0 < x < \infty$ الذى يحقق الشرط

$$u(0, t) = \mu(t),$$

حيث $\mu(t)$ دالة معطاة.

وأكثر المسائل بلا شروط ابتدائية التي تقابلنا هي عند إعطاء نظام حدى دورى

$$\mu(t) = A \cos \omega t$$

(انظر الملحق ١ بالباب الثالث).

ومن الطبيعى أن نعتبر أنه بمرور فترة زمنية طويلة تتغير درجة حرارة القضيب عملياً بنفس القانون الدورى بنفس التردد. غير أننا إذا أردنا الأخذ في الاعتبار الشروط الابتدائية بدقة فإننا شكلياً لن نحصل أبداً على حل دورى لأن تأثير

الشروط الابتدائية لن يؤول إلى الصفر رغم أنه يضعف بمرور الزمن . ولا معنى لأخذ هذا التأثير في عين الاعتبار نظرًا للأخطاء الموجودة في عملية الملاحظة . وبدراسة الحل الدوري نحن نهمل تأثير المعطيات الابتدائية .

إن صياغة المسائل الحدية الواردة فيما سبق لا تتعلق فقط بالمعادلة بمعاملات ثابتة . فنحن نقصد بجملة «معادلة التوصيل الحرارى» أية معادلة من معادلات الفقرات السابقة .

وعلاوة على المسائل الحدية الخطية المذكورة أعلاه تصاغ أيضًا مسائل بشروط حدية لاختية ، على سبيل المثال على الصورة :

$$k \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \sigma [u^4(0, t) - \theta^4(0, t)],$$

وهذا الشرط الحدى يناظر الإشعاع (الحرارى) وفقًا لقانون ستيفان - بولتسمان من الطرف $x = 0$ فى وسط حرارته $\theta(t)$. وتتوقف بتفصيل أكبر عند صياغة المسائل الحدية . ندرس المسألة الحدية الأولى لمنطقة محدودة .

إن حل المسألة الحدية الأولى هو تلك الدالة $u(x, t)$ التى تتميز بالخواص التالية :

$$1 - u(x, t) \text{ معرفة ومتصلة فى المنطقة المغلقة}$$

$$0 \leq x \leq l, \quad t_0 \leq t \leq T;$$

$$2 - u(x, t) \text{ تحقق معادلة التوصيل الحرارى فى المنطقة المفتوحة}$$

$$0 < x < l, \quad t_0 < t;$$

$$3 - u(x, t) \text{ تحقق الشرط الابتدائى والشرطين الحديين أى}$$

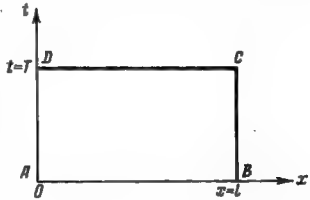
$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

حيث $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ دوال متصلة تحقق شروط التوافق

$$\varphi(0) = \mu_1(t_0) [= u(0, t_0)], \quad \varphi(l) = \mu_2(t_0) [= u(l, t_0)],$$

الضرورية لاتصال $u(x, t)$ في المنطقة المغلقة .

ندرس مستوى الحالات الطورية (x, t) (شكل ٣٧) . وفي مسألتنا نبحث عن الدالة $u(x, t)$ المعرفة داخل المستطيل $ABCD$. وهذه المنطقة تعرف من صياغة المسألة نفسها لأنه يتم بحث عملية انتشار الحرارة في القضيب $0 \leq x \leq l$ خلال الفترة الزمنية $0 \leq t \leq T$ حيث نعلم خلال هذه الفترة النظام الحرارى في الطرفين . نفرض أن $t_0 = 0$. ونفترض أن $u(x, t)$ تحقق المعادلة فقط عند $0 < x < l, 0 < t \leq T$ ولكن ليس عندما $t = 0$ (الضلع AB) وليس عندما $x = 0, x = l$ (الضلعان AD, BC) حيث تعطى الشروط الابتدائية والحدية مباشرة بقيم هذه الدالة . وإذا طلبنا أن نتحقق المعادلة على سبيل المثال عندما $t = 0$ فإننا بذلك نكون كما



شكل ٣٧

لو أننا طلبنا وجود المشتقة $u_{xx}(x, 0) = \varphi''$ التي تدخل في المعادلة . وبهذا المطلب كنا سنضيق مجال الظواهر الفيزيائية المدروسة بأن نستثنى من دراستنا تلك الدوال التي لا يتحقق لها هذا المطلب . ودون

افتراض اتصال $u(x, t)$ في المنطقة $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$ (أى في المستطيل المغلق $ABCD$) أو بدون شرط آخر يحل محل هذا الافتراض كان الشرط (٣) سيفقد معناه* . وبالفعل ندرس الدالة $v(x, t)$ المعرفة بالطريقة التالية :

$$\left. \begin{aligned} v(x, t) &= C & (0 < x < l, 0 < t \leq T), \\ v(x, 0) &= \varphi(x) & (0 \leq x \leq l), \\ v(0, t) &= \mu_1(t), \\ v(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\} (0 \leq t \leq T),$$

حيث C ثابت اختياري . والدالة $v(x, t)$ كما هو واضح ، تحقق الشرط (٢) وكذلك الشروط الحدية . غير أن هذه الدالة لا تعبر عن عملية انتشار درجة الحرارة في القضيب عند درجة الحرارة الابتدائية $C \neq \varphi(x)$ ودرجات الحرارة

* سندرس فيما بعد المسائل الحدية بشروط حدية وابتدائية مفصلة . ول هذه المسائل سيتم تدقيق المعنى المقصود به تحقيق الشروط الحدية .

الحدية $\mu_1(t) \neq C$ ، $\mu_2(t) \neq C$ لأنها منفصلة عندما $x=0, x=l$ و $t=0$.

إن اتصال الدالة $u(x, t)$ عندما $0 < x < l, 0 < t \leq T$ ينتج من أن هذه الدالة تحقق للمعادلة . وبذلك فطلب اتصال $u(x, t)$ عندما $0 \leq x \leq l$ و $0 \leq t \leq T$ يتعلق من حيث الجوهر فقط بتلك النقاط حيث تعطى القيم الحدية والابتدائية . وفيما سيلي بعد ذلك ستقصد بعبارة « حل المعادلة الذى يحقق الشروط الحدية » تلك الدالة التى تحقق الشروط (١) و (٢) و (٣) دون النص صراحة فى كل مرة على هذه الشروط إذا لم تستدع لذلك ضرورة خاصة .

وبالمثل تصاغ المسائل الحدية الأخرى بما فى ذلك المسائل على القضيب اللانهائى والمسائل بدون شروط ابتدائية .

وللمسائل فى عدة متغيرات هندسية مستقلة يحتفظ بصحته كل ما سبق ذكره . وفى هذه المسائل تعطى عندما $t = t_0$ درجة الحرارة الابتدائية وتعطى الشروط الحدية على سطح الجسم . ويمكن أيضاً دراسة مسائل للمناطق اللانهائية . وبالنسبة إلى كل مسألة من المسائل المصاغة تنشأ الأسئلة التالية * :

(١) وحدانية حل المسألة المصاغة ،

(٢) وجود الحل ،

(٣) اعتماد الحل اعتماداً متصلاً على الشروط الإضافية .

وإذا كان للمسألة المصاغة عدة حلول فإن عبارة « حل المعادلة » لا تكون ذات معنى محدد . ولذا فقبل التحدث عن حل المسألة يلزم إثبات وحدانيته . وللتطبيق العملى يكون السؤال الثانى هو السؤال الأكثر جوهرية لأنه عند إثبات وجود الحل تعطى عادة طريقة حساب الحل أيضاً .

وكما ذكرنا فيما سبق (الباب الثانى ، بند ٢ ، فقرة ٥) تسمى العملية عملية محددة فيزيائياً إذا تغير حل المعادلة تغيراً طفيفاً عندما تتغير الشروط الابتدائية

والحدية للمسألة تغيراً طفيفاً أيضاً . وفي المستقبل سثبت أن عملية انتشار الحرارة تتحدد فيزيائياً بشروطها الابتدائية والحدية ، أى أن التغير الطفيف للشروط الحدية والابتدائية يناظره تغير طفيف للحل نفسه .

فقرة ٥ : مبدأ القيمة العظمى . فبما سيلي مستدرس المعادلة ذات المعاملات الثابتة

$$v_t = a^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v.$$

وكما رأينا تؤول هذه المعادلة بالتعويض

$$v = e^{\mu x + \lambda t} \cdot u$$

عندما

$$\mu = -\frac{\beta}{2a^2}, \quad \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2}$$

إلى الصورة

$$u_t = a^2 u_{xx}.$$

نثبت الخاصية التالية لحل هذه المعادلة والتي نسميها بمبدأ القيمة العظمى :

إذا كانت الدالة $u(x, t)$ المعرفة والمتصلة في المنطقة المغلقة $0 \leq x \leq l$ ،

$0 \leq t \leq T$ تحقق معادلة الاتصال الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (19)$$

في نقط المنطقة $0 < x < l, 0 < t \leq T$ فإن الدالة $u(x, t)$ تصل إلى قيمها العظمى والصغرى إما في اللحظة الابتدائية وإما في نقطى الحدود $x = 0$ أو $x = l$.

والدالة $u(x, t) = \text{const.}$ تحقق ، كما هو واضح ، معادلة التوصيل الحرارى وتصل إلى قيمتها العظمى (الصغرى) في أية نقطة . غير أن هذا لا يتناقض مع النظرية لأن من شرطها ينتج أنه إذا وصلت الدالة إلى قيمها العظمى (الصغرى) داخل المنطقة فإنها أيضاً (وليس فقط) ينبغي أن تصل إلى هذه القيمة العظمى (الصغرى) إما عندما $t = 0$ أو عند $x = 0$ أو عند $x = l$.

والمعنى الهندسى لهذه النظرية واضح : إذا كانت درجة الحرارة على الحدود وفي اللحظة الابتدائية لا تفوق قيمة معينة M فإنه مع انعدام المصادر الحرارية

لا يمكن أن تنشأ داخل الجسم درجة حرارة أكبر من M . ونتوقف أولاً عند إثبات النظرية في حالة القيمة العظمى .

يتم إثبات هذه النظرية بافتراض تحقق العكس (الإثبات بالعكس) . نرمز بالحرف M للقيمة العظمى للدالة $u(x, t)$ عندما $0 \leq x \leq l$ أو $t = 0$ أو عندما $x = 0$ أو $0 \leq t \leq T$ ونفرض أن الدالة $u(x, t)$ تصل في نقطة ما (x_0, t_0) ($0 < x_0 < l, 0 < t_0 \leq T$) إلى قيمتها العظمى المساوية

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

نقارن بين طرفي المعادلة (19) الأيمن والأيسر عند النقطة (x_0, t_0) . حيث إن الدالة تصل عند النقطة (x_0, t_0) إلى قيمتها العظمى فإنه من الضروري يجب أن يكون

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leq 0. \quad (20)$$

إذا لم نفرض اتصال الدالة $u(x, t)$ في المنطقة المغلقة $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$ فإن الدالة $u(x, t)$ كان من الممكن ألا تصل إلى قيمتها العظمى في أية نقطة وكانت التحليلات التالية تصبح غير قابلة للتطبيق . ووفقاً للنظرية التي تنص على أن أية دالة متصلة تصل إلى قيمتها العظمى في المنطقة المغلقة يمكننا أن نكون واثقين من الآتي : (١) الدالة $u(x, t)$ تصل إلى قيمتها العظمى على الضلع الأسفل أو الضلعين الجانبيين للمستطيل وهذه القيمة العظمى قد رمزنا إليها بالحرف M ، (٢) إذا كانت الدالة $u(x, t)$ أكبر من M ولو في نقطة واحدة فإنه توجد النقطة (x_0, t_0) حيث تصل الدالة $u(x, t)$ إلى قيمتها العظمى التي تكون أكبر من M :

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0),$$

علماً بأن

$$0 < x_0 < l, \quad 0 < t_0 \leq T.$$

• بالفعل فكما نعلم من التحليل الرياضي تكون الشروط الكافية لكي تصل الدالة $f(x)$ في النقطة x_0 الواقعة داخل الفترة $(0, l)$ إلى نهايتها الصغرى النسبية هي الشروط التالية : $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = 0$

وبذلك فإذا كانت الدالة $f(x)$ في النقطة x_0 لها نهاية عظمى فإن : (١)

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{و} \quad (٢) \quad \text{لا يمكن أن يكون } f''(x_0) > 0 \text{ أي أن } f''(x_0) \leq 0.$$

وبعد ذلك فحيث إن $u(x_0, t)$ تصل إلى قيمتها العظمى عند $t = t_0$ فإن

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0. \quad (21)$$

وبمقارنة الإشارة في طرفي المعادلة (19) نرى أن إشارتي الطرفين مختلفتان. غير أن هذا التحليل لا يثبت بعد النظرية لأن الطرف الأيمن والطرف الأيسر يمكن أن يكون كل منهما مساوياً للصفر مما لا يؤدي ما سبق ذكره من اختلاف الإشارتين إلى تناقض. وقد أوردنا هذا التحليل لإبراز الفكرة الأساسية في الإثبات. وللإثبات الكامل نعين النقطة (x_1, t_1) التي فيها $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0$. ولهذا الغرض ندرس الدالة المساعدة

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t), \quad (22)$$

حيث k عدد ثابت ما. ومن الواضح أن

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

وأن

$$k(t_0 - t) \leq kT.$$

نختار $k > 0$ بحيث يكون kT أصغر من $\varepsilon/2$ أى $k < \varepsilon/2T$. عندئذ فإن القيمة العظمى للدالة $v(x, t)$ عندما $t = 0$ أو $x = 0$ أو $x = l$ لن تفوق $M + \frac{\varepsilon}{2}$. أى أن

$$v(x, t) \leq M + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{عندما } t = 0 \text{ أو } x = 0 \text{ أو } x = l). \quad (23)$$

وذلك لأنه لهذه المتغيرات لا يفوق الحد الأول من العلاقة (22) المقدار M . ولا يفوق الحد الثانى المقدار $\varepsilon/2$.

ووفقاً لاتصال الدالة $v(x, t)$ يجب أن تصل في نقطة ما (x_1, t_1) إلى قيمتها العظمى. ومن الواضح أن

$$v(x_1, t_1) \geq v(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

ولذا فإن $t_1 > 0$. $x_1 < l$ لأنه عندما $t = 0$ أو $x = 0$ أو $x = l$ نتحقق

عند ذلك يتضح أنه إذا كان $t_0 < T$ فإن $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. أما إذا كان $t_0 = T$ فإن $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$.

المتباينة (23). وفي النقطة (x_1, t_1) بالتناظر مع (20) و (21) يجب أن يكون
 $v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0$, $v_t(x_1, t_1) \geq 0$ وبالأخذ في الاعتبار (22) نجد أن

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_1, t_1) &= v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0, \\ u_t(x_1, t_1) &= v_t(x_1, t_1) + h \geq h > 0. \end{aligned}$$

ومن هنا ينتج أن

$$u_t(x_1, t_1) - a^2 u_{xx}(x_1, t_1) \geq h > 0,$$

أى أن المعادلة (19) في النقطة الداخلية (x_1, t_1) لا تتحقق. وبذلك أثبتنا أن
 الدالة $u(x, t)$ حل معادلة التوصيل الحرارى (19) لا يمكن أن تصل داخل المنطقة
 إلى قيم تفوق القيمة العظمى للدالة $u(x, t)$ على الحدود (أى عند $x = 0$, $x = l$ و $t = 0$).

بالفعل وبالمثل يمكن اثبات الجزء الثانى من النظرية المتعلق بالقيمة الصغرى.
 ولا يتطلب ذلك إثباتاً خاصاً لأن الدالة $u_1 = -u$ لها قيمة عظمى حيث يكون
 للدالة u قيمة صغرى.

فقرة ٦ : نظرية الوجدانية. إذا كانت الدالتان $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ المعرفتان
 والمتصلتان في المنطقة $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ تحققان معادلة التوصيل
 الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (24) \quad \text{للمنطقة } (0 < x < l, t > 0)$$

ونفس الشروط الحدية والابتدائية

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= u_2(x, 0) = \varphi(x), \\ u_1(0, t) &= u_2(0, t) = \mu_1(t), \\ u_1(l, t) &= u_2(l, t) = \mu_2(t), \end{aligned}$$

فإن $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ *

لإثبات هذه النظرية ندرس الدالة

$$v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t).$$

* في فقرة ٣، بند ٢ سيتم تشديد هذه النظرية وحذف مطلب الاتصال عند $t = 0$.

وحيث إن الدالتين $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ متصلتان عند

$$0 \leq x \leq l,$$

$$0 \leq t \leq T,$$

فإن الدالة $v(x, t)$ التى تساوى الفرق بينهما تكون أيضاً دالة متصلة فى نفس هذه المنطقة . وبوصفها الفرق بين حلين لمعادلة التوصيل الحرارى فى المنطقة $0 < x < l, t > 0$ تكون الدالة $v(x, t)$ حلاً لمعادلة التوصيل الحرارى المتجانسة فى هذه المنطقة . وبذلك فإن مبدأ القيمة العظمى قابل للتطبيق على هذه الدالة ، أى أنها تصل إلى قيمتها العظمى أو الصغرى إما عند $t = 0$ أو عند $x = 0$ أو عند $x = l$. غير أنه لدينا من الشرط

$$v(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

ولذا فإن

$$v(x, t) = 0,$$

أى أن

$$u_1(x, t) = u_2(x, t).$$

ومن هنا يتبع أن حل المسألة الحدية الأولى يكون وحيداً .

ثبتت أيضاً عدة نتائج مباشرة لمبدأ القيمة العظمى . وعند ذلك ستقول ببساطة « حل معادلة التوصيل الحرارى » بدلاً من ذكر خواص الدوال التى تحقق فضلاً عن معادلة التوصيل الحرارى الشروط الابتدائية والحدية تفصيلاً .

١ - إذا حقق حلان لمعادلة التوصيل الحرارى $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ الشروط :

$$u_1(x, 0) \leq u_2(x, 0),$$

$$u_1(0, t) \leq u_2(0, t), \quad u_1(l, t) \leq u_2(l, t),$$

فإن

$$u_1(x, t) \leq u_2(x, t)$$

لجميع قيم $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$.

بالفعل ، الفرق $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ يحقق الشروط التى أثبتنا بها مبدأ القيمة العظمى ، وعلاوة على ذلك

$$v(x, 0) \geq 0, \quad v(0, t) \geq 0, \quad v(l, t) \geq 0.$$

ولذا فإن

$$v(x, t) \geq 0$$

للمنطقة $0 < x < l, 0 < t \leq T$ ، وإلا فالدالة $v(x, t)$ كان سيصبح لها قيمة صغرى سالبة في المنطقة

$$0 < x < l, 0 < t \leq T.$$

٢- إذا تحققت ثلاثة حلول لمعادلة التوصيل الحرارى

$$u(x, t), \underline{u}(x, t), \bar{u}(x, t)$$

الشروط

$$\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t)$$

عند

$$t=0, x=0, x=l,$$

فإن هذه المتباينات ستتحقق بالتطابق أى لجميع x, t عندما $0 \leq x \leq l$ ، $0 \leq t \leq T$

وهذا المنطوق يعتبر تطبيقاً للنتيجة ١ على زوجى الدوال .

$$\underline{u}(x, t), u(x, t) \text{ و } u(x, t), \bar{u}(x, t)$$

٣- إذا تحققت لحلين من حلول معادلة التوصيل الحرارى $u_1(x, t), u_2(x, t)$

المتباينة

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon$$

للقيم

$$t=0, x=0, x=l,$$

فإن

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon$$

بالتطابق أى تتحقق هذه المتباينة لجميع x, t من

$$0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T.$$

وهذا المنطوق يتبع من النتيجة ٢ إذا طبقناها على حلول معادلة التوصيل

الحرارى

$$\underline{u}(x, t) = -\varepsilon,$$

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t),$$

$$\bar{u}(x, t) = \varepsilon.$$

والنتيجة ٣ تكفل إثبات الاعتماد المتصل لحل المسألة الحدية الأولى على القيمة الابتدائية والقيم الحدية. فإذا أخذنا في مسألة فيزيائية ما بدلاً من حل معادلة التوصيل الحرارى المناظر للشرط الابتدائى والشرطين الحديين

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

الحل $u(x, t)$ المناظر لقيمة ابتدائية أخرى وقيمتين حديتين أخريين معرفة بالدوال $\varphi^*(x)$, $\mu_1^*(t)$, $\mu_2^*(t)$ التى لا تختلف فى حدود درجة الدقة للمعطاة ε عن الدوال $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$:

$$|\varphi(x) - \varphi^*(x)| \leq \varepsilon, \quad |\mu_1(t) - \mu_1^*(t)| \leq \varepsilon, \quad |\mu_2(t) - \mu_2^*(t)| \leq \varepsilon,$$

فإن الدالة $u_1(x, t)$ ستختلف عن الدالة $u(x, t)$ فى حدود نفس درجة الدقة ε

$$|u(x, t) - u_1(x, t)| \leq \varepsilon.$$

وفى ذلك ينحصر مبدأ التحديد الفيزيائى للمسألة.

ولقد أوردنا بالتفصيل موضوع وحدانية الحل والتحديد الفيزيائى للمسألة على مثال المسألة الحدية الأولى لمستقيم محدود. ونظرية الوحدانية للمسألة الحدية الأولى لمنطقة محدودة فى الفراغ الثنائى أو الثلاثى الأبعاد يمكن أن تثبت بالتكرار الحرفى لنفس التحليلات السابقة.

وتنشأ موضوعات ومشاكل مشابهة عند دراسة المسائل الأخرى التى تمت صياغة عدد منها فى الفقرات السابقة. وهذه المسائل تتطلب بعض التغييرات فى شكل طريقة الإثبات. ووحدانية حل المسألة للمنطقة غير المحدودة (انظر فقرة ٧) أو للمسائل بلا شروط ابتدائية تكون صحيحة عند فرض بعض الشروط الإضافية على الدوال محل الدراسة.

فقرة ٧: نظرية الوحدانية للمستقيم اللانهائى. عند حل المسألة على مستقيم لانهائى يعتبر جوهرياً مطلب محدودية الدالة المطلوب تعيينها فى كل

المنطقة . أى مطلب وجود ذلك العدد M بحيث يكون $|u(x, t)| < M$ لجميع $-\infty < x < +\infty$ و $t \geq 0$.

إذا كانت الدالتان $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ المتصلتان والمحدودتان في كل منطقة تغير المتغيرين (x, t) تحققان معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty, t > 0) \quad (19)$$

والشرط

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) \quad (-\infty < x < \infty),$$

فإن

$$u_1(x, t) = u_2(x, t) \quad (-\infty < x < \infty, t \geq 0).$$

ندرس كالمعتاد الدالة

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t).$$

الدالة $v(x, t)$ متصلة وتحقق معادلة التوصيل الحرارى ومحدودة في كل المنطقة

$$|v(x, t)| \leq |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)| < 2M \quad (-\infty < x < \infty, t \geq 0)$$

وتحقق الشرط

$$v(x, 0) = 0.$$

ومبدأ القيمة العظمى الذى استخدمناه فى إثبات وحدانية حل المسألة للمستقيم المحدود غير قابل للتطبيق هنا لأن الدالة $v(x, t)$ في المنطقة اللامحدودة يمكن أن تصل أبداً إلى أية قيم عظمى . وللاستعانة بهذا المبدأ ندرس المنطقة :

$$|x| \leq L,$$

حيث L عدد مساعد سنقوم فيما بعد بزيادته زيادة لانهائية . وندرس أيضاً الدالة

$$V(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right). \quad (25)$$

والدالة $V(x, t)$ متصلة وتحقق معادلة التوصيل الحرارى وهو ما يمكن التأكد منه مباشرة بإجراء عملية التفاضل . وفضلاً عن ذلك تتميز هذه الدالة بالخاصيتين التاليتين :

$$\begin{aligned} V(x, 0) &\geq |v(x, 0)| = 0, \\ V(\pm L, t) &\geq 2M \geq |v(\pm L, t)|. \end{aligned} \quad (26)$$

والمجموعة المحدودة $|x| \leq L, 0 \leq t \leq T$ يكون مبدأ القيمة العظمى صحيحاً. ويتطبيق النتيجة ٢ من الفقرة السابقة على الدوال $u = -V(x, t)$. $u = v(x, t)$. $u = V(x, t)$. وأخذ العلاقة (26) بعين الاعتبار نحصل على:

$$-\frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right) \leq v(x, t) \leq \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right).$$

وبتثبيت قيمة معينة (x, t) والاستعانة بالطابع الاختياري لاختيار L سنقوم بزيادته زيادة لانهائية. بالانتقال إلى النهاية عند $L \rightarrow \infty$ نحصل على

$$v(x, t) = 0,$$

مما يثبت النظرية.

بند ٢ - طريقة فصل المتغيرات

فقرة ١ : المسألة الحدية المتجانسة. نتقل إلى حل المسألة الحدية الأولى لمعادلة لتوصيل الحرارى على المستقيم المحدود

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (0 < x < l, t > 0) \quad (1)$$

بالشرط الابتدائي

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (0 \leq x \leq l) \quad (2)$$

وبالشروط الحدية

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (t \geq 0). \quad (3)$$

ونبدأ دراسة المسألة الحدية الأولى العامة بحل المسألة المبسطة التالية I :

عين الحل المتصل في المنطقة المغلقة $(0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T)$ للمعادلة المتجانسة

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

الذى يحقق الشرط الابتدائي

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

والشرطين الحديين المتجانسين

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

ولحل هذه المسألة ندرس أولاً ، كما هو متبع في طريقة فصل المتغيرات ،
المسألة الأساسية المساعدة التالية :

عين حل المعادلة

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

الذى لا يساوى الصفر بالتطابق ويحقق الشروط الحدية المتجانسة

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (5)$$

ويمكن التعبير عنه في الصورة

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (6)$$

حيث $X(x)$ دالة في المتغير x فقط . $T(t)$ دالة في المتغير t فقط .

بالتعويض بالصورة المقترحة للحل (6) في المعادلة (4) وقسمة طرفي المتساوية
على $a^2 XT$ نحصل على :

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad (7)$$

حيث $\lambda = \text{const}$ لأن الطرف الأيسر للمتساوية يعتمد فقط على t والطرف
الأيمن يعتمد فقط على x .

ومن هنا يتبع أن

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (8)$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0, \quad (8')$$

وتعطى الشروط الحدية (5) :

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (9)$$

وبذلك فلتعيين الدالة $X(x)$ حصلنا على مسألة القيم الذاتية (مسألة شتورم -
ليوفيل)

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (10)$$

التي بحثناها عند حل معادلة الذبذبات في الباب الثاني (انظر بند ٣ ، فقرة ١) .
وعندئذ أوضحنا أنه فقط لقيم البارامتر λ المساوية

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (11)$$

توجد حلول غير تافهة (غير صفرية) للمعادلة (8) تساوى :

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (12)$$

وهذه القيم λ_n تناظرها حلول المعادلة (8')

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad (13)$$

حيث C_n معاملات قابلة للتحديد .

وبالعودة الى المسألة المساعدة الأساسية نرى أن الدوال :

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (14)$$

تعتبر حلولاً خاصة للمعادلة (4) تحقق الشروط الحدية الصفرية .

نعود الآن إلى حل المسألة (I) . نكوّن شكلياً المتسلسلة :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (15)$$

الدالة $u(x, t)$ تحقق الشروط الحدية لأن كل حدود المتسلسلة تحققها . وإذا طلبنا
تحقق الشروط الابتدائية نحصل على :

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (16)$$

أى أن C_n تعتبر معاملات فورييه للدالة $\varphi(x)$ عند تحليلها في متسلسلة الجيوب في
الفترة $(0, l)$:

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \cdot d\xi. \quad (17)$$

ندرس الآن المتسلسلة (15) بالمعاملات C_n المحددة بالعلاقة (17) ونوضح أن
هذه المتسلسلة تحقق كل شروط المسألة (I) . ولهذا الغرض يجب إثبات أن الدالة

$u(x, t)$ المعرفة بالتسلسلة (15) قابلة للتفاضل وتحقق المعادلة في المنطقة $0 < x < l, t > 0$ ومتصلة في نقط حدود هذه المنطقة (عند $t = 0$ و $x = 0$ و $x = l$).

وحيث إن المعادلة (4) خطية فإنه وفقاً لمبدأ التراكب تكون التسلسلة المكونة من الحلول الخاصة حلاً أيضاً إذا كانت متقاربة وكان يمكن تفاضلها حداً حداً مرتين بالنسبة إلى x ومرة بالنسبة إلى t (انظر المأخوذة بالباب الثاني - بند ٣ - فقرة ٣). نوضح أنه عند $t \geq \bar{t} > 0$ (\bar{t} أى عدد مساعد) تتقارب بانتظام متسلسلتا المشتقات

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}$$

بالفعل

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| = \left| -C_n \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \right| < |C_n| \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cdot a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t}$$

وفيما بعد مستصاغ الشروط الإضافية التي يجب أن تحققها الدالة $\varphi(x)$. نفرض في البداية أن $\varphi(x)$ دالة محدودة $|\varphi(x)| < M$. عندئذ يكون

$$|C_n| = \left| \frac{2}{l} \right| \left| \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \right| < 2M,$$

ومن هنا ينتج أن :

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t}, \quad t \geq \bar{t}$$

وبالمثل

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t}, \quad t \geq \bar{t}.$$

وبوجه عام

$$\left| \frac{\partial^{k+l} u_n}{\partial t^k \partial x^l} \right| \leq 2M \left(\frac{\pi}{l} \right)^{2k+l} \cdot n^{2k+l} \cdot a^{2k} \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t}, \quad t \geq \bar{t}.$$

نبحث تقارب متسلسلة الحد الأعظم (majorant) حيث $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n = N n^q e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \quad (15')$$

وتبعاً لاختبار دالمبرت تتقارب هذه المتسلسلة لأن

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 (n^2+2n+1)t}}{n^q e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 t}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 (2n+1)t} = 0. \end{aligned}$$

ومن هنا ينتج إمكانية تفاضل المتسلسلة (15) حداً حداً أى عدد من المرات في المنطقة $0 < t \leq \bar{t}$. وبعد ذلك فبالاستعانة بمبدأ التراكم نستنتج أن الدالة المعرفة بهذه المتسلسلة تحقق المعادلة (4). ووفقاً للطابع الاختياري للعدد \bar{t} يسرى ذلك لجميع $t > 0$. وبذلك أثبتنا أنه عند $t > 0$ تعبر المتسلسلة (15) عن دالة قابلة للتفاضل عدد المرات اللازم وتحقق المعادلة (4)*.

وإذا كانت الدالة $\varphi(x)$ متصلة ولها مشتقة متقطعة الاتصال وتحقق الشرطين $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 0$ فإن المتسلسلة

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (15)$$

تعرف دالة متصلة عند $t \geq 0$. بالفعل من المتبينة :

$$|u_n(x, t)| < |C_n| \quad (t \geq 0, 0 \leq x \leq l)$$

ينتج مباشرة التقارب المنتظم للمتسلسلة (15) عند $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ مما يثبت صحة المنطوق السابق إذا ما أخذنا في الاعتبار أنه للدالة $\varphi(x)$ المتصلة والمتقطعة المولسة (piecewise smooth) تتقارب المتسلسلة المكونة من القيم المطلقة لمعاملات فورييه إذا كان $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ **.

* عند إثبات أن المتسلسلة (15) تحقق للمعادلة $u_t = a^2 u_{xx}$ عند $t > 0$ استخدمنا فقط كون معاملات فورييه C_n محدودة وهذا صحيح كحالة خاصة لأية دالة محدودة $\varphi(x)$.

** انظر الباب الثاني ، بند ٣ ، فقرة ٣.

وهكذا تم بالكامل حل مسألة تعيين حل المسألة الحدية الأولى للمعادلة المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية والشرط الابتدائي للتصل والمتقطع الملوثة .
 فقرة ٢ : دالة المصدر . نحول الحل الناتج (15) بالتعويض عن C_n بقيمها :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \alpha^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \right] \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \alpha^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \alpha^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right] \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

وتغيير ترتيب عمليتي التجميع والتكامل صحيح دائماً عند $t > 0$ نظراً لأن المتسلسلة بين القوسين تتقارب بانتظام بالنسبة إلى ξ عند $t > 0$.
 نستعين بالرمز

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \alpha^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \quad (18)$$

وبالاستعانة بالدالة $G(x, \xi, t)$ يمكن التعبير عن الدالة $u(x, t)$ في الصورة

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (19)$$

والدالة $G(x, \xi, t)$ تسمى بدالة المصدر اللحظي النقطة أو بتفصيل أكبر دالة التأثير الحرارى لمصدر حرارى لحظى نقطى .

نبين أن دالة المصدر $G(x, \xi, t)$ تمثل باعتبارها دالة في x توزيع درجات الحرارة في القضيب $0 \leq x \leq l$ في اللحظة الزمنية t إذا كانت درجة الحرارة في اللحظة الابتدائية $t = 0$ مساوية للصفر وفى هذه اللحظة تنبعث عند النقطة $x = \xi$ لحظياً كمية حرارة (سنحدد مقدارها فيما بعد) ، وعند طرفى القضيب يحتفظ باستمرار بدرجة حرارة صفرية .

* المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ حيث α_n تحدّد بالمعادلة (15') تميز عند $q = 0$ متسلسلة الحد الاعظم للمتسلسلة بين القوسين .

والصيغة «كمية الحرارة Q المنبعثة في النقطة ξ » تعنى كالمعتاد أن لدينا حرارة منبعثة على فترة «غير كبيرة» حول النقطة ξ محل الدراسة. وتغير درجة الحرارة $\varphi_e(\xi)$ الناتج من ظهور حرارة حول النقطة يكون كما هو واضح مساوياً للصفر خارج الفترة $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ التي تنبعث عليها الحرارة، وداخل هذه الفترة يمكن اعتبار $\varphi_e(\xi)$ دالة موجبة ومتصلة وقابلة للتفاضل يكون لها

$$cp \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_e(\xi) d\xi = Q, \quad (20)$$

لأن الطرف الأيسر لهذه المعادلة يمثل أيضاً كمية الحرارة المؤدية إلى تغير درجة الحرارة بمقدار $\varphi_e(\xi)$. وعملية انتشار درجة الحرارة في هذه الحالة تتحدد بالعلاقة (19):

$$u_\varepsilon(x, t) = \int_0^1 G(x, \xi, t) \varphi_e(\xi) d\xi. \quad (21)$$

والآن ننتقل إلى النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$. بأخذ اتصال G عندما $t > 0$ في الاعتبار وكذلك المتساوية (20) وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة عند قيمتين ثابتتين لـ x, t نحصل على:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, t) &= \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} G(x, \xi, t) \varphi_e(\xi) d\xi = \\ &= G(x, \xi^*, t) \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_e(\xi) d\xi = G(x, \xi^*, t) \frac{Q}{cp}, \end{aligned} \quad (21')$$

حيث ξ^* نقطة ما متوسطة في الفترة $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. ووفقاً لاتصال الدالة $G(x, \xi, t)$ بالنسبة إلى ξ عند $t > 0$ نحصل على:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t) &= \frac{Q}{cp} G(x, \xi, t) = \\ &= \frac{Q}{cp} \cdot \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{T}\right)^2 \alpha^2 t} \sin \frac{\pi n}{T} x \cdot \sin \frac{\pi n}{T} \xi. \end{aligned} \quad (22)$$

ومن هنا يتبع أن $G(x, \xi, t)$ تمثل درجة الحرارة في النقطة x في اللحظة t الناتجة بسبب المصدر اللحظي النقطي الذي قدرته $Q = cp$ والموضوع في اللحظة $t = 0$ عند النقطة ξ من نقط الفترة $(0, l)$.

ونشير إلى الخاصية التالية للدالة $G(x, \xi, t)$: الدالة $G(x, \xi, t) \geq 0$ لأي x, ξ و $t > 0$. بالفعل ندرس الدالة الابتدائية $\Phi_0(x)$ التي تتميز بالخواص المذكورة أعلاه والحل المناظر لها (21'). فن عدم سلبية الشروط الابتدائية والحدية ينتج وفقاً لمبدأ القيمة العظمى أن

$$u_0(x, t) \geq 0$$

لجميع $0 \leq x \leq l$ و $t > 0$. ومن هنا بالاستعانة بالعلاقة (21') يكون لدينا :

$$u_0(x, t) = G(x, \xi^*, t) \frac{Q}{cp} \geq 0 \quad (t > 0 \text{ عدد}) \quad (21'')$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ نحصل من (21') على المتباينة

$$G(x, \xi, t) \geq 0, \quad 0 \leq x, \quad \xi \leq l, \quad t > 0,$$

وهو المطلوب إثباته .

ولهذه النتيجة معنى فيزيائي بسيط . غير أنه يصعب توضيحه من العلاقة (19) مباشرة لأن $G(x, \xi, t)$ إنما يعبر عنها بمتسلسلة متعاقبة بالإشارات .

فقرة ٣ : المسائل الحدية بشروط ابتدائية منفصلة . تتعلق النظرية الواردة أعلاه بالحلول المتصلة لمعادلة التوصيل الحراري في المنطقة المغلقة $0 \leq x \leq l$ ، $0 \leq t \leq T$. وتعتبر شروط الاتصال هذه مقيدة ومحددة للغاية . فبالفعل ندرس المسألة المبسطة لتبريد قضيب مسخن بانتظام عندما تكون درجة الحرارة عند طرفيه مساوية للصفر . والشروط الإضافية تكون على الصورة :

$$u(x, 0) = u_0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

وإذا كانت $u_0 \neq 0$ فإن حل هذه المسألة يجب أن يكون منفصلاً في النقطتين $(0, 0)$ ، $(l, 0)$. ويوضح هذا المثال أن شروط اتصال القيمة الابتدائية وشروط ترافقها مع القيم الحدية تستبعد من الدراسة حالات هامة من الناحية العملية . غير أن العلاقة (19) تعطي حل المسألة الحدية في هذه الحالة أيضاً .

وفي التطبيقات كثيراً ما يستعان بعلاقات تخرج عن حدود شروط تطبيقها وأحياناً لا يطرح مطلقاً موضوع شروط تطبيق هذه العلاقات . والتبرير المنطقي والسليم لأساس جميع العلاقات كان سيصبح عملية مطولة للغاية مما كان سيصرف

اهتمام الباحث عن جوانب الظاهرة الكمية والكيفية المميزة للجوهر الفيزيائي للعملية .

غير أننا نرى أنه من الضروري - ولو للأمثلة المبسطة على الأقل - إعطاء التبرير لأساس الجهاز الرياضي الكافي لحل المسائل الأساسية .

ندرس المسائل الحدية بدوال ابتدائية متقطعة الاتصال دون أن نفترض أن الدالة الابتدائية مترافقة مع الشروط الحدية . إن هذه المجموعة من الشروط الإضافية تعتبر عامة بشكل كاف بالنسبة لمتطلبات التطبيقات العملية وبسيطة بشكل يكفي لعرض النظرية . إن هدفنا هو إثبات أن نفس العلاقة (19) تعطى حل المسألة المطروحة . نجرى بحث هذه المسألة على عدة مراحل . نثبت مسبقاً النظرية التالية :

حل معادلة التوصيل الحراري

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (0 < x < l, \quad t > 0), \quad (4)$$

المتصل في المنطقة المغلقة $(0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T)$ والذي يحقق الشروط

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

حيث $\varphi(x)$ دالة متصلة اختيارية تؤول إلى الصفر عند $x=0, x=l$. يكون محددًا تحديدًا أحادي القيمة ويعبر عنه بالعلاقة :

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (19)$$

وهذه النظرية أثبتت أعلاه بافتراض تحقق شرط إضافي هو قابلية التفاضل المتقطع الاتصال للدالة $\varphi(\xi)$.

لنتحرر من هذا الشرط . ندرس متابعة من الدوال المتصلة والمتقطعة القابلة للتفاضل $\varphi_n(x)$ ($\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0$) تتقارب بانتظام إلى $\varphi(x)$. (بمثابة $\varphi_n(x)$) يمكن على سبيل المثال أخذ الدوال للتمثلة بخطوط منكسرة منطبقة على $\varphi(x)$ عند النقط $\frac{l-k}{n}$ حيث $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$. والدوال $u_n(x, t)$ المعرفة بالعلاقة (19) بدلالة $\varphi_n(x)$ تحقق كل شروط النظرية لأن $\varphi_n(x)$ تحقق شروط قابلية

التفاضل المتقطع . وهذه الدوال تتقارب بانتظام وتعرف في النهاية دالة متصلة $u(x, t)$. بالفعل ، لأى ε يمكن تعيين $n(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$n_1, n_2 \geq n(\varepsilon) \quad \text{إذا كان} \quad |\varphi_{n_1}(x) - \varphi_{n_2}(x)| < \varepsilon \quad (0 \leq x \leq l)$$

وذلك لأن هذه الدوال تتقارب بانتظام تبعاً للفرض . ومن هنا ووفقاً لمبدأ القيم العظمى ينتج أيضاً أن

$$n_1, n_2 \geq n(\varepsilon) \quad \text{إذا كان} \quad |u_{n_1}(x, t) - u_{n_2}(x, t)| < \varepsilon \quad (0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T)$$

مما يثبت التقارب المنتظم لمتابعة الدوال $u_n(x, t)$ إلى دالة متصلة ما $u(x, t)$. وإذا ثبتنا النقطة (x, t) وانتقلنا إلى النهاية تحت علامة التكامل فإننا سنحصل على أن الدالة

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t G(x, \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi = \int_0^t G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$$

متصلة في المنطقة المغلقة $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$ وتحقق الشرط الابتدائي (2) . ووفقاً للهامش الملحق بالصفحة ٢٤٠ لا يصعب التأكد من أن هذه الدالة تحقق أيضاً المعادلة (4) عند $t > 0$. وهكذا انتهى إثبات النظرية . والعلاقة (19) تعطى الحل المتصل الوحيد للمسألة محل البحث .

ننتقل إلى إثبات نظرية وحدانية لحالة الدالة الابتدائية المتقطعة الاتصال $\varphi(x)$ دون افتراض أن هذه الدالة مترافقة مع الشروط الحدية . نثبت أن الدالة للتصلة في المنطقة $t > 0$ التي تحقق معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (4)$$

في المنطقة $0 < x < l, t > 0$ والشروط الحدية الصغرية

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (5)$$

والشرط الابتدائي

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

تكون محددة تحديداً أحادى القيمة إذا كانت :

١- متصلة في نقط اتصال الدالة $\varphi(x)$ و

٢- محدودة في المنطقة المغلقة $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq \bar{t}_0$ حيث \bar{t}_0 عدد اختياري موجب .

نفرض أن هذه الدالة موجودة . من الواضح أنه وفقاً للنظرية السابقة يمكن التعبير عنها في المنطقة $t > \bar{t}$ بالعلاقة :

$$u(x, t) = \int_0^{\bar{t}} G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_2(\xi) d\xi \quad (t > \bar{t} > 0) \quad (19)$$

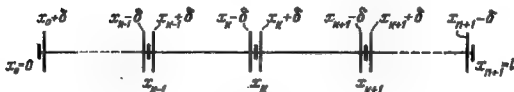
لأى \bar{t} حيث \bar{t} قيمة مساعدة ،

$$0 < \bar{t} \leq t, \quad \varphi_2(x) = u(x, \bar{t}).$$

نجرى عملية الانتقال إلى النهاية في هذه العلاقة عندما $\bar{t} \rightarrow 0$ مع الاحتفاظ بـ x و t ثابتين . نوضح^٥ أن الانتقال إلى النهاية يمكن تحت علامة التكامل - وبالتالي فالدالة $u(x, t)$ يمكن التعبير عنها في صورة التكامل

$$u(x, t) = \int_0^t G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \quad [\varphi(\xi) = u(\xi, 0)], \quad (19)$$

الذى يحددها تحديداً أحادى القيمة .



شكل ٣٨

نفرض أن $x_{n+1} = l$. $x_0 = 0$. بفرض $\varphi(x)$ الدالة $\varphi(x)$. وبأخذ الفترات المغلقة $I_k (x_{k-1} + \delta \leq x \leq x_k - \delta)$ $(k = 0, 1, \dots, n)$ حيث δ عدد مامثبت وصغير بشكل كاف . لا يكون من الصعب التأكد من أن الدالة المكاملة في (19') تتقارب بانتظام إلى الدالة المكاملة في (19) في أية فترة مغلقة $I_k (k = 0, 1, 2, \dots, n)$. وفى الفترات المغلقة $\bar{I}_k (x_{k-1} - \delta \leq x \leq x_k + \delta)$ $(k = 1, 2, 3, \dots, n)$ ، $\bar{I}_0 (x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta)$ ، $\bar{I}_{n+1} (x_{n+1} - \delta \leq x \leq x_{n+1} + \delta)$ تكون الصيغتان للكاملتان في

النظرية المثبتة فيما سبيل تعتبر حالة خاصة لنظرية ليبيج حول إمكانية الانتقال إلى النهاية تحت علامة التكامل إذا كانت متتابعة الدوال $F_n(x)$ تتقارب - تقريباً في كل مكان - إلى الدالة المجموع النهائية $F(x)$ وإذا كانت هذه المتتابعة محدودة بالدالة المجموع . وهذا الإثبات نوردته لتجنب استخدام مفاهيم نظرية الفئات . وإذا استخدمنا مفاهيم نظرية الفئات فإنه يمكن بالمثل تماماً إثبات النظرية التى تنص على أن حل معادلة التوصيل الحرارى $u(x, t)$ الذى يحقق الشروط الحدية الصفرية يكون معرفاً تقريباً أحادى القيمة :

(١) إذا كانت $u(x, t) \leq F(x)$ حيث $F(x)$ دالة مجموع ما و

(٢) إذا كان تقريباً في كل مكان

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \varphi(x),$$

حيث $\varphi(x)$ الدالة المجموع الابتدائية للحلطة .

(19') . (19) محدودتين بعدد ما N عند أي \bar{t} ($0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_0$) وذلك نظرا لتحديد الدالة $u(x, t)$ المفترض ونظرا لاتصال $G(x, \xi, t)$ عند $0 \leq \xi \leq l, t > 0$. وينقسم الفرق بين التكاملين (19) و (19') إلى $2n+3$ تكامل مأخوذة على I_k ($k=0, 1, \dots, n$) و \bar{I}_k ($k=0, 1, \dots, n+1$) نرى أن هذا الفرق يمكن جملة أقل من أي عدد معطى مسبقا ε إذا كان

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{2n+3} \frac{1}{4N}.$$

ومن ثم فإن :

$$\left| \int_{\bar{I}_k} [G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t) \varphi(\xi)] d\xi \right| \leq \frac{\varepsilon}{2n+3},$$

وإذا كان t قد اختير صغيراً للدرجة أن

$$|G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t) \varphi(\xi)| < \frac{1}{l} \frac{\varepsilon}{2n+3}$$

لأي $t \leq \bar{t}$ على I_k ($k=0, 1, \dots, n$) ومن ثم يكون

$$\int_{I_k} [G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t) \varphi(\xi)] d\xi < \frac{\varepsilon}{2n+3}$$

لـ $t \leq \bar{t}$ ($k=0, 1, \dots, n$)

ومن هنا نتج المتباينة

$$\left| \int_{\bar{I}} [G(x, \xi, t - \bar{t}) \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t) \varphi(\xi)] d\xi \right| < \varepsilon$$

لـ $t \leq \bar{t}$. التي تثبت قانونية الانتقال إلى النهاية عندما $\bar{t} \rightarrow 0$ تحت علامة التكامل. وبذلك فإذا وجدت الدالة $u(x, t)$ التي تحقق شروط النظرية فإنها قابلة للتعبير عنها في الصورة (19) مما يثبت وحدانية هذه الدالة.

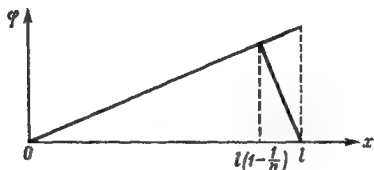
ثبتت الآن أن العلاقة (19) هي عبارة عن الحل المحدود للمعادلة (4) الذي يحقق الشروط (2) لأي دالة متقطعة الاتصال $\varphi(x)$ ويكون متصلاً في كل نقط اتصال الدالة $\varphi(x)$.

وستثبت هذه النظرية على مرحلتين. ثبت أنها صحيحة إذا كانت الدالة $\varphi(x)$ دالة خطية :

$$\varphi(x) = cx. \quad (2')$$

ندرس متابعة الدوال المساعدة المتصلة (شكل ٣٩)

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq l\left(1 - \frac{1}{n}\right), \\ a(l-x), & l\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq x \leq l, \quad a = (n-1)c. \end{cases}$$



شكل ٣٩

والدوال $u_n(x, t)$ المعرفة بواسطة العلاقة (19) للدوال $\varphi_n(x)$ تعتبر حلولاً متصلة لمعادلة التوصيل الحراري بالشروط الحدية الصفرية والشروط الابتدائية

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x).$$

وحيث إن :

$$\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \quad (0 \leq x \leq l),$$

فإنه وفقاً لمبدأ القيم العظمى يكون :

$$u_n(x, t) \leq u_{n+1}(x, t).$$

والدالة $U_0(x) = cx$ تعتبر حلاً متصلاً لمعادلة التوصيل الحراري . ووفقاً لمبدأ القيم العظمى يكون

$$u_n(x, t) \leq U_0(x),$$

لأن هذه المتباينة تكون صحيحة عندما $x=0$, $x=l$, $t=0$. وبذلك فإن $u_n(x, t)$ هي متتابعة غير متناقصة باطراد محدودة من أعلى بالدالة $U_0(x)$. ومن هنا ينتج أن هذه المتتابعة متقاربة . ولا يصعب ملاحظة أن

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi = \\ &= \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \leq U_0(x). \end{aligned}$$

لأن الانتقال إلى النهاية تحت علامة التكامل قانوني . ووفقاً لهامش الصفحة ٢٤٠ فإن هذه الدالة تحقق المعادلة والشروط الحدية الصفرية عند $t > 0$. ثبت أن هذه الدالة متصلة عند $t = 0$ في الفترة $0 \leq x < l$. نفرض أن $x_0 < l$. نختار n بحيث يكون $x_0 < l \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. في هذه الحالة $\varphi_n(x_0) = U_0(x_0)$ وبالأخذ في الاعتبار أن

$$u_n(x, t) \leq u(x, t) \leq U_0(x)$$

وأن

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0}} u_n(x, t) = \lim_{x \rightarrow x_0} U_0(x) = \varphi(x_0),$$

نستنتج وجود النهاية

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0}} u(x, t) = \varphi(x_0),$$

التي لا تعتمد على طرق الاقتراب $x \rightarrow x_0$ ، $t \rightarrow 0$. ومن هنا يتبع اتصال $u(x, t)$ في النقطة $(x_0, 0)$. وهذه الدالة محدودة لأنها لا تفوق $U_0(x)$. وهكذا أثبتت النظرية للدالة $\varphi(x) = cx$.

وبالتعويض عن x بـ $l - x$ نتأكد من أن النظرية صحيحة للدالة

$$\varphi(x) = b(l - x). \quad (2'')$$

ومن هنا يتبع أنها صحيحة لأي دالة على الصورة

$$\varphi(x) = B + Ax,$$

لأن مثل هذه الدالة يمكن الحصول عليها بجمع $(2')$ و $(2'')$. وبعد ذلك فإنه يتبع من هنا أيضاً أن النظرية صحيحة لأي دالة متصلة بدون الافتراض بأن $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. بالفعل يمكن التعبير عن أية دالة $\varphi(x)$ من هذا النمط في الصورة

$$\varphi(x) = \left[\varphi(0) + \frac{x}{l} (\varphi(l) - \varphi(0)) \right] + \psi(x),$$

حيث الحد بين القوسين المربعين دالة خطية و $\psi(x)$ دالة متصلة تتحول إلى الصفر عند طرفي الفترة : $\psi(0) = \psi(l) = 0$. وحيث إننا تأكدنا بالفعل من أن النظرية

قابلة للتطبيق على كل حد فإنه يتبع من هنا أن النظرية صحيحة أيضاً للدالة $\varphi(x)$.

وننتقل الآن إلى إثبات النظرية لأية دالة متقطعة الاتصال $\varphi(x)$. العلاقة (19) في هذه الحالة أيضاً تحدد الحل الذي يحقق المعادلة والشروط الحدية الصفرية.

نفرض أن النقطة x_0 نقطة ما من نقط اتصال الدالة $\varphi(x)$. ثبت أنه لأي ε يمكن تعيين $\delta(\varepsilon)$ بحيث يكون $|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ إذا كان $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ و $t < \delta(\varepsilon)$. ووفقاً لاتصال الدالة $\varphi(x)$ في النقطة x_0 يوجد $\eta(\varepsilon)$ بحيث إن

$$|x - x_0| < \eta(\varepsilon) \text{ للقيم } |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ومن هنا

$$|x - x_0| < \eta(\varepsilon) \text{ للقيم } \varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(x) \leq \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (23)$$

نكون الدالتين المساعدةتين القابلتين للتفاضل $\bar{\varphi}(x)$, $\underline{\varphi}(x)$:

$$|x - x_0| < \eta(\varepsilon) \text{ لقيم } \bar{\varphi}(x) = \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (a)$$

$$|x - x_0| > \eta(\varepsilon) \text{ لقيم } \bar{\varphi}(x) \geq \varphi(x)$$

$$|x - x_0| < \eta(\varepsilon) \text{ لقيم } \underline{\varphi}(x) = \varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \quad (b)$$

$$|x - x_0| > \eta(\varepsilon) \text{ لقيم } \underline{\varphi}(x) \leq \varphi(x)$$

في الفترة $|x - x_0| > \eta(\varepsilon)$ تحقق الدالتان $\bar{\varphi}$, $\underline{\varphi}$ الشروط (a), (b) فقط، أما فيما عدا ذلك فهي اختياريتان. ووفقاً للمتباعدة (23) يكون

$$\underline{\varphi}(x) \leq \varphi(x) \leq \bar{\varphi}(x). \quad (24)$$

ندرس الدالتين

$$\bar{u}(x, t) = \int_0^1 G(x, \xi, t) \bar{\varphi}(\xi) d\xi,$$

$$\underline{u}(x, t) = \int_0^1 G(x, \xi, t) \underline{\varphi}(\xi) d\xi.$$

ووفقاً لاتصال $\varphi(x)$ ، $\bar{\varphi}(x)$ تكون الدالتان $\underline{u}(x, t)$ ، $\bar{u}(x, t)$ متصلتين في النقطة x_0 ، أى يوجد ذلك العدد $\delta(\varepsilon)$ بحيث إن

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\bar{u}(x, t) - \bar{\varphi}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ |\underline{u}(x, t) - \underline{\varphi}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right.$$

ومن هنا

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(x, t) \leq \bar{\varphi}(x) + \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) + \varepsilon \\ \underline{u}(x, t) \geq \underline{\varphi}(x) - \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) - \varepsilon \end{array} \right.$$

ووفقاً لعدم سلبية الدالة $G(x, \xi, t)$ يتبع من العلاقة (24) أن

$$\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t). \quad (25)$$

ومن هنا نحصل على المتباينة

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon) \quad \varphi(x_0) - \varepsilon \leq u(x, t) \leq \varphi(x_0) + \varepsilon$$

أو

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon) \quad |u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

وهو المطلوب إثباته. ومحدودية الدالة $|u(x, t)|$ تتبع من العلاقة (25) ومن محدودية الدالتين $\underline{u}(x, t)$ ، $\bar{u}(x, t)$. وبذلك نكون قد أثبتنا النظرية.

فقرة ٤ : المعادلة غير المتجانسة للتوصيل الحرارى . ندرس المعادلة غير المتجانسة للتوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (1)$$

بالشرط الابتدائى

$$u(x, 0) = 0 \quad (26)$$

والشرطين الحديين

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

سنبحث عن حل هذه المسألة $u(x, t)$ في صورة متسلسلة فورييه بالدوال الذاتية (11) أى بالدوال $\left\{ \sin \frac{\pi n}{l} x \right\}$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (27)$$

معتبرين t عند ذلك بارامترا. لتعيين الدالة $u(x, t)$ يجب تعيين الدوال $u_n(t)$. تمثل الدالة $f(x, t)$ في صورة المتسلسلة:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

حيث

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (28)$$

وبالتعويض بالصورة المقترحة للحل في المعادلة الأصلية (1) سنحصل على:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) + \dot{u}_n(t) - f_n(t) \right\} = 0.$$

وستحقق هذه المعادلة إذا كانت كل معاملات المفكوك مساوية للصفر أى إذا كان

$$\dot{u}_n(t) = -a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) + f_n(t). \quad (29)$$

بالاستعانة بالشرط الابتدائى للدالة $u(x, t)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0,$$

نحصل على الشرط الابتدائى للدوال $u_n(t)$:

$$u_n(0) = 0. \quad (30)$$

وبحل المعادلة التفاضلية العادية (29) بالشرط الابتدائى الصفرى (30)* نجد أن:

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \quad (31)$$

* انظر نهاية فقرة ٤ - بند ٣ من الباب الثانى .

وبالتعويض بالصيغة (31) للدوال $u_n(t)$ في العلاقة (27) نحصل على حل المسألة الأصلية في الصورة

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \alpha^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (32)$$

وبالاستعانة بالصيغة (28) للدوال $f_n(\tau)$ وتحويل الحل الناتج (32) نحصل على

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \alpha^2 (t-\tau)} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \sin \frac{n\pi}{l} \xi \right\} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (33) \end{aligned}$$

حيث

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \alpha^2 (t-\tau)} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \sin \frac{n\pi}{l} \xi \quad (34)$$

تنطبق على دالة المصدر المعروفة بالعلاقة (18).

نوضح المعنى الفيزيائي للحل الناتج

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (33)$$

نفرض أن الدالة $f(\xi, \tau)$ تختلف عن الصفر فقط في جوار صغير بقدر كاف للنقطة $M_0(\xi_0, \tau_0)$:

$$\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \Delta\tau.$$

والدالة $F(\xi, \tau) = c\rho f(\xi, \tau)$ هي عبارة عن كثافة المصادر الحرارية. والكمية الكلية للحرارة المنبعثة على الفترة $(0, l)$ خلال كل فترة تأثير المصدر (أى خلال $\Delta\tau$) تساوى

$$Q = \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta\xi} c\rho f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (35)$$

نطبق نظرية القيمة المتوسطة على الصيغة

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ = \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta \tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = G(x, \xi_0, t - \tau_0) \cdot \frac{Q}{c\rho} = \bar{u}(x, t),$$

حيث

$$\xi_0 < \bar{\xi} < \xi_0 + \Delta \xi, \quad \tau_0 < \bar{\tau} < \tau_0 + \Delta \tau.$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\Delta \xi \rightarrow 0$, $\Delta \tau \rightarrow 0$ نحصل على الدالة

$$u(x, t) = \lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow 0 \\ \Delta \tau \rightarrow 0}} \bar{u}(x, t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi_0, t - \tau_0), \quad (36)$$

التي يمكن تفسيرها على أنها دالة تأثير المصدر اللحظي للحرارة المركز في النقطة ξ_0 في اللحظة τ_0 .

وإذا علمت الدالة $\frac{Q}{c\rho} G(x, \xi, t - \tau)$ التي تمثل تأثير وحدة المصدر اللحظي المركز فإن تأثير المصادر الموزعة باتصال بالكثافة $F(x, t) = c\rho f(x, t)$ يجب أن يعبر عنه بالعلاقة (33) كما يتج ذلك مباشرة من المعنى الفيزيائي للدالة $G(x, \xi, t - \tau)$.

وهكذا فإن تأثير المصادر الحرارية المؤثرة في المنطقة $(\xi_0, \xi_0 + \Delta \xi)$ و $(\tau_0, \tau_0 + \Delta \tau)$ على درجات الحرارة يعطى بالصيغة:

$$G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) \Delta \xi \Delta \tau \left(\frac{Q}{c\rho} = f(\xi, \tau) \Delta \xi \Delta \tau \right).$$

وإذا كانت المصادر موزعة باتصال فإنه بتجميع التأثيرات الحرارية للمصادر المؤثرة في كل المنطقة $0 \leq \xi \leq l$, $0 \leq \tau \leq t$ نحصل بعد الانتقال إلى النهاية عندما $\Delta \xi \rightarrow 0$, $\Delta \tau \rightarrow 0$ على:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

وبذلك فانطلاقاً من المعنى الفيزيائي لدالة المصدر $G(x, \xi, t)$ كان من الممكن أن نكتب مباشرة الصيغة (33) للدالة المعبرة عن حل المعادلة غير المتجانسة.

وإذا كانت لدينا العلاقة أو الصورة التي يجب أن يعبر بها عن حل المسألة فإنه يمكن بحث شروط تطبيق هذه العلاقة بالنسبة للدالة $f(x, t)$. ولن نقوم بهذا البحث هنا.

لقد درسنا هنا المعادلات غير المتجانسة بالشروط الابتدائية الصفرية. وإذا كانت الشروط الابتدائية مختلفة عن الصفر فإنه يجب أن نصيغ إلى هذا الحل حل المعادلة المتجانسة بالشروط الابتدائي المعطى $u(x, 0) = \varphi(x)$ وهو الذي حصلنا عليه في فقرة ١.

فقرة ٥ : المسألة الحدية الأولى العامة. ندرس المسألة العامة الحدية الأولى لمعادلة التوصيل الحرارى :

عين حل المعادلة

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (1)$$

بالشروط الإضافية

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ندخل دالة مجهولة جديدة $v(x, t)$

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t), \quad (37)$$

التي تمثل الانحراف عن دالة ما معلومة $U(x, t)$.

وهذه الدالة $v(x, t)$ ستعرف بأنها حل المعادلة

$$\begin{aligned} v_t - a^2 v_{xx} &= \bar{f}(x, t), \\ \bar{f}(x, t) &= f(x, t) - [U_t - a^2 U_{xx}] \end{aligned}$$

بالشروط الإضافية

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \bar{\varphi}(x), & \bar{\varphi}(x) &= \varphi(x) - U(x, 0), \\ v(0, t) &= \bar{\mu}_1(t), & \bar{\mu}_1(t) &= \mu_1(t) - U(0, t), \\ v(l, t) &= \bar{\mu}_2(t), & \bar{\mu}_2(t) &= \mu_2(t) - U(l, t). \end{aligned}$$

نختار الدالة المساعدة $U(x, t)$ بحيث يكون

$$\bar{u}_1(t) = 0, \quad \bar{u}_2(t) = 0,$$

ولهذا الغرض يكفي وضع *

$$U(x, t) = u_1(t) + \frac{x}{l} [u_2(t) - u_1(t)].$$

وبذلك فإن تعيين الدالة $u(x, t)$ التي تعطي حل المسألة الحدية العامة يؤول إلى تعيين الدالة $v(x, t)$ التي تعطي حل المسألة الحدية بشروط حدية صفرية. وطريقة تعيين الدالة $v(x, t)$ معطاة في فقرة 4.

وهذه الصورة الشكلية الواردة أعلاه لحل المسائل عند وجود عدم تجانس في المعادلة والشروط الحدية، لا تكون دائماً مناسبة للتعبير عن الدالة المجهولة $u(x, t)$. وتعتمد المصاعب الناشئة عند تعيين الدالة المساعدة $v(x, t)$ على الدالة $U(x, t)$ التي يبحث عن الانحراف عنها.

وكحالة خاصة للمماثل ذات عدم التجانس المستقر (stationary non-homogeneity) يكون من المناسب فصل الحل المستقر زمنياً والبحث عن الانحراف عن هذا الحل **.

ندرس على سبيل المثال مسألة القضيب المحدود $(0, l)$ الذي يحتفظ بدرجتي حرارة ثابتتين u_0, u_1 عند طرفيه :

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u(0, t) &= u_0, \\ u(l, t) &= u_1. \end{aligned}$$

نبحث عن الحل في صورة المجموع

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

حيث $\bar{u}(x)$ درجة الحرارة المستقرة زمنياً، $v(x, t)$ الانحراف عن درجة الحرارة المستقرة زمنياً.

* انظر الباب الثاني، بند ٣، فقرة ٥.

** انظر الباب الثاني، بند ٣، فقرة ٦.

للمالتين $v(x, t)$, $\bar{u}(x)$ منحصل على الشروط

$$\begin{aligned}\bar{u}'' &= 0, & v_t &= \alpha^2 v_{xx}; \\ \bar{u}(0) &= u_0, & v(x, 0) &= \varphi(x) - \bar{u}(x) = \varphi_1(x); \\ \bar{u}(l) &= u_1, & v(0, t) &= 0, \\ & & v(l, t) &= 0.\end{aligned}$$

ومن هنا نعين

$$\bar{u}(x) = u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0).$$

أما الدالة $v(x, t)$ المعرفة بالشروط الابتدائية والشروط الحدية المتجانسة فتعين بلا صعوبة بطريقة فصل المتغيرات .

مسائل :

١ - استنبط معادلة لعملية تسخين سلك رفيع متجانس بواسطة تيار كهربائي إذا كان يحدث على سطح السلك تبادل حراري مع الوسط المحيط .

٢ - استنبط معادلة الانتشار في وسط يتحرك بانتظام في اتجاه المحور x بسرعة u . ادرس حالة التغير المستقر الواحد .

٣ - انطلاقاً من معادلات ماكسويل مع افتراض أن $E_x = E_z = 0$, $H_x = 0$ وإهمال تيارات الإزاحة (displacement current) وضع أنه في الوسط المتجانس الموصل تحقق مركبة المجال الكهرومغناطيسي E_y المعادلة

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

حيث σ موصليّة الوسط ، c سرعة الضوء . استنبط المعادلة لـ H_z .

٤ - اشرح المعنى الفيزيائي للشروط الحدية التالية لمسائل التوصيل الحراري والانتشار :

$$\begin{aligned}a) & u(0, t) = 0, & b) & u_x(0, t) = 0, \\ c) & u_x(0, t) = hu(0, t) = 0, & & \\ & u_x(l, t) + hu(l, t) = 0 & (h > 0).\end{aligned}$$

٥ - حل مسألة تبريد قضيب متجانس منتظم التسخين عندما تكون درجة الحرارة في طرفيه صفراً مع افتراض انعدام التبادل الحراري على السطح الجانبي .

٦ - درجة الحرارة الابتدائية لقضيب هي $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$ عند $0 < x < l$ ويحفظ بدرجة حرارة ثابتة عند طرفيه $u(0, t) = u_1$, $u(l, t) = u_2$ عندما $0 < t < \infty$. عين درجة حرارة القضيب إذا كان التبادل الحراري على السطح الجانبي غير موجود . عين درجة الحرارة المستقرة زمنياً .

٧ - حل المسألة ٦ بالشروط الحدية التالية : على أحد الطرفين يحفظ بدرجة حرارة ثابتة والطرف الآخر معزول حراريا .

٨ - حل مسألة تسخين سلك رفيع متجانس بتيار كهربائي ثابت إذا كانت درجة الحرارة الابتدائية ودرجة الحرارة الحدية وكذلك درجة حرارة الوسط المحيط تساوى الصفر .

٩ - أسطوانة طولها l مملوءة بهواء بدرجة حرارته وضغطه هما درجة حرارة وضغط الوسط المحيط . تنتج الأسطوانة من أحد طرفيها في اللحظة الابتدائية ، ومن الجو المحيط حيث يكون تركيز غاز معين مساويا u_0 يبدأ انتشار الغاز في الأسطوانة . عين كمية الغاز المنتشر في الأسطوانة خلال الفترة الزمنية t إذا كان التركيز الابتدائي للغاز في الأسطوانة يساوى الصفر .

١٠ - حل المسألة ٩ بافتراض أن الطرف الأيسر للأسطوانة مغلق بم حاجز شبه منفذ (semipermeable) .

١١ - حل مسألة تبريد قضيب متجانس ذي سطح جانبي معزول حراريا إذا كانت درجة حرارته الابتدائية $\varphi(x, 0) = u_0$ وعند طرفه يحدث تبادل حراري مع الوسط المحيط ذي درجة الحرارة الصفرية . ادرس كذلك الحالة الخاصة $u_0 = \varphi(x)$.

١٢ - حل المسألة ١١ بافتراض أن درجة حرارة الوسط المحيط تساوى U

١٣ - حل المسألة ١١ متعبرا أنه يحدث على السطح الجانبي تبادل حراري مع الوسط المحيط الذي درجة حرارته :

(أ) تساوى الصفر (ب) ثابتة وتساوى u_0 .

١٤ - عين درجة الحرارة المستقرة زمنيا للقضيب مهمل التبادل الحراري على السطح الجانبي ومتعبرا أن أحد طرفيه معزول حراريا والطرف الثاني موصل دفق حراري يتغير بقانون توافق مع الزمن .

١٥ - حل المسألة ١٤ متعبرا أن أحد طرفي القضيب تكون درجة حرارته صفرا ودرجة حرارة الطرف الثاني تتغير بقانون توافق مع الزمن .

١٦ - القضيب $(0, l)$ مكون من قطعتين متجانستين ذواتي مقطع عرضي واحد متلامستين عند النقطة $x = x_0$ وبميزاتها u_1, u_2, α_1 و u_0, α_0 على الترتيب . عين درجة الحرارة المستقرة في مثل هذا القضيب (لوجات الحرارة) إذا كان أحد طرفي القضيب $(x = 0)$ يوجد عند درجة حرارة صفرية ودرجة حرارة الطرف الآخر تتغير بقانون جيبى مع الزمن .

١٧ - الطرف الأيسر للقضيب المركب من مسألة ١٦ يوجد عند درجة حرارة صفرية والطرف الأيمن يوجد عند درجة حرارة $u_1(l, t) = u_2(l, t)$. ودرجة الحرارة الابتدائية للقضيب تساوى الصفر . عين درجة الحرارة $u(x, t)$ للقضيب في النظام المتكامل (الحد الأول من المفكوك) .

١٨ - عين درجة الحرارة $u(x, t)$ للقضيب الذي تكون درجة حرارته الابتدائية مساوية للصفر والشروط الحدية تكون على الصورة :

$$u(0, t) = Ae^{-\alpha t}, \quad u(l, t) = B,$$

حيث $A, B, \alpha > 0$ ثوابت .

بند ٣ - مسائل على المستقيم اللانهائى

فقرة ١ : انتشار الحرارة على مستقيم لانهائى . دالة المصدر لمنطقة لانهائية .
ندرس على مستقيم لانهائى المسألة بالمعطيات الابتدائية التالية (مسألة كوشى) :
عين الدالة المحدودة $u(x, t)$ المعرفة فى المنطقة $-\infty < x < \infty, t \geq 0$ التى
تحقق معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (1)$$

والشرط الابتدائى

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

وإذا كانت $\varphi(x)$ دالة متصلة فإن تحقق الشرط الابتدائى سنفهمه بمعنى أن
 $u(x, t)$ تكون متصلة عند $t = 0$ أى أن

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0).$$

وكما رأينا فى فقرة ٧ ، بند ١ يكون حل معادلة التوصيل الحرارى معرّفا
أحاذى القيمة بشروطه الابتدائية إذا كان هذا الحل محدودا (نهائيا) . ولذا يدخل
شرط المحدودية فى صياغة النظريات .

نعطى فى البداية الصورة الشكلية لحل المسألة المصاغة ، المبنية على فصل
المتغيرات .

سنبحث عن الحل المحدود وغير التافه (غير الصفري) للمعادلة (١) القابل
للتعبير عنه فى الصورة :

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (3)$$

بالتعويض بالصيغة (3) فى (1) نحصل على :

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2,$$

حيث λ^2 بارامتر الفصل . ومن هنا نحصل على :

$$T'' + a^2 \lambda^2 T = 0, \quad (4)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \quad (5)$$

وبحل المعادلتين (5) ، (4) نعين الحلول الخاصة للمعادلة (1) على الصورة

$$u_{\lambda}(x, t) = A(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t} \pm i \lambda x, \quad (6)$$

التي تحقق شرط المحدودية . وهنا λ أى عدد حقيق $-\infty < \lambda < \infty$ ، ولذا
ففي العلاقة (6) نأخذ الإشارة الموجبة ونكوّن الدالة

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t + i \lambda x} d\lambda. \quad (7)$$

وإذا أمكن حساب المشتقات الداخلة في المعادلة (1) بواسطة عملية التفاضل تحت علامة التكامل (7) فإن الدالة (7) كما هو واضح ستحقق المعادلة (1) بوصفها تراكباً للحلول الخاصة لهذه المعادلة .

وبطلب تحقق الشرط الابتدائي عند $t = 0$ نحصل على :

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{i \lambda x} d\lambda. \quad (8)$$

ونستعين الآن بعلاقة التحويل العكسي لتكامل فورييه

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i \lambda \xi} d\xi. \quad (9)$$

بالتعويض بالعلاقة (9) في (7) وتغيير ترتيب التكامل نحصل على :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i \lambda \xi} d\xi \right) e^{-\lambda^2 a^2 t + i \lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t + i \lambda (x - \xi)} d\lambda \right) \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

والتكامل الداخلى في (10) يساوى * :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t + i \lambda (x - \xi)} d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (11)$$

* انظر كتاب يسكونوف « التفاضل والتكامل » الجزء الثانى طبعة دار « مير » باللغة العربية .

بالتعويض بالعلاقة (11) في (10) نصل إلى التعبير التكاملي عن الحل المطلوب :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi; t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (12)$$

حيث

$$G(x, \xi; t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (13)$$

الدالة $G(x, \xi, t)$ المعروفة بالعلاقة (13) كثيرا ما تسمى بالحل الأساسي لمعادلة التوصيل الحرارى .

ويمكن التأكد مباشرة من أن الدالة

$$G(x, \xi; t - t_0) = \frac{Q}{cp2\sqrt{\pi a^2 (t - t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-t_0)}} \quad (13')$$

تعبر عن درجة الحرارة عند النقطة x في اللحظة الزمنية t إذا كان في اللحظة الابتدائية $t = t_0$ في النقطة ξ تنبعث كمية حرارة $Q = cp$.

الدالة $G(x, \xi, t - t_0)$ تحقق معادلة التوصيل الحرارى المتغيرين (x, t) * وهو ما يمكن التحقق منه بعملية التفاضل المباشر.

وكمية الحرارة الموجودة على المحور x في اللحظة $t > t_0$ تساوى

$$\begin{aligned} cp \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - t_0) dx &= \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-t_0)}} \frac{dx}{2\sqrt{a^2 (t-t_0)}} = \\ &= \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2} da = Q = cp, \end{aligned}$$

• بالفعل

$$G_x = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x-\xi}{2[a^2(t-t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{[a^2(t-t_0)]^{3/2}} + \frac{(x-\xi)^2}{4[a^2(t-t_0)]^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{a^2}{2[a^2(t-t_0)]^{3/2}} + \frac{a^2(x-\xi)^2}{4[a^2(t-t_0)]^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}.$$

أى أن

$$G_t = a^2 G_{xx}.$$

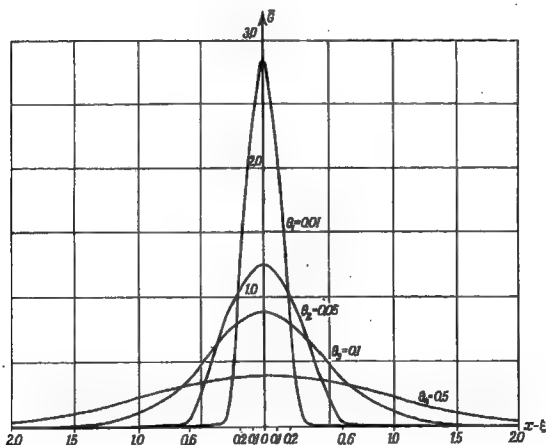
لأن

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2} da = \sqrt{\pi}$$

$$\left(a = \frac{x - \xi}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \quad da = \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} \right).$$

وبذلك فإن كمية الحرارة على المستقيم محل البحث لا تتغير مع مرور الزمن .
والدالة $G(x, \xi, t-t_0)$ تعتمد على الزمن من خلال المتغير $\theta = a^2(t-t_0)$ فقط
ومن ثم فهذه الدالة يمكن كتابتها في الصورة :

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\theta}}. \quad (13'')$$



شكل ٤٠

وفي شكل ٤٠ مبين منحنى الدالة G في اعتمادها على x لقيم θ المختلفة . وتقع
تقريباً كل المساحة المحدودة بهذا المنحنى فوق الفترة

$$(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon),$$

حيث ε عدد صغير للغاية إذا كان $\theta = \alpha^2(t - t_0)$ عددا صغيرا بشكل كاف. ومقدار هذه المساحة مضروباً في $c\rho$ يساوى كمية الحرارة الواصلة في اللحظة الابتدائية. وبذلك فلقيم $t - t_0 > 0$ الصغيرة تكون الحرارة كلها تقريبا مركزة في جوار صغير للنقطة ξ . وبما سبق ذكره ينتج أنه في اللحظة t_0 تكون كل كمية الحرارة مركزة في النقطة ξ .

وبدراسة تغير درجة الحرارة في نقطة مثبتة $x = \xi + h$ مع مرور الزمن عندما $h = 0$ أى عندما $x = \xi$ نحصل على:

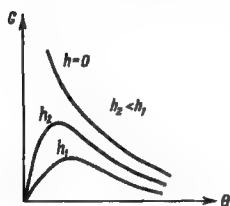
$$G_{x=\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}.$$

وبذلك فإن درجة الحرارة في هذه النقطة حيث تتبع الحرارة تكون كبيرة (عالية) بلا حدود لقيم θ الصغيرة.

وإذا كانت $x \neq \xi$ أى $h \neq 0$ فإن الدالة G تمثل في صورة حاصل ضرب عاملين

$$G_{x \neq \xi} = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} \right] e^{-h^2/\theta}.$$

والعامل الثانى في حاصل الضرب هذا أصغر من الواحد الصحيح: وعند قيم θ الكبيرة يكون ≈ 1 ، أما لقيم θ الصغيرة فيكون ≈ 0 . ومن هنا ينتج أن



شكل ٤١

$G_{x \neq \xi} = G_{x=\xi}$ لقيم θ الكبيرة، وكلما كان h صغيراً، أى كلما كانت x أقرب إلى ξ ، كلما كان العامل الثانى أكبر. ومنحنى الدالتين $G_{x=\xi}$ ، $G_{x \neq \xi}$ عند $h_2 < h_1$ مبيان على الرسم في شكل ٤١. وليس من الصعب ملاحظة أن

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} G_{x \neq \xi} = 0.$$

بفك عدم التحديد نعين (باستخدام قاعدة هوبيتال):

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-h^2/\theta} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\theta^{-3/2}}{\frac{h^2}{4\theta^2} e^{-h^2/\theta}} = 0.$$

وتوضح العلاقة (13') أنه في أية نقطة x تكون درجة الحرارة ، الناتجة بالمصدر اللحظى النقطى المؤثر في اللحظة الابتدائية $t = 0$ ، مختلفة عن الصفر في أية لحظات زمنية مهما كانت صغيرة . وكان من الممكن تفسير هذه الحقيقة بأنها نتيجة لانتشار درجة الحرارة بسرعة لانتهائية . غير أن ذلك يتناقض مع التصور الجزيئى الكينيتى لطبيعة الحرارة . وهذا التناقض يتبع نتيجة أننا استعنا عند استنباط معادلة التوصيل الحرارى الوارد أعلاه بالتصور الظواهرى (phenomenal) لانتشار الحرارة الذى لا يأخذ في الاعتبار قصورية عملية حركة الجزيئات .

والآن نوضح شروط قابلية العلاقة (12) للتطبيق .

نثبت أن العلاقة

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi, \quad (12')$$

التي تسمى بتكامل بواسون تمثل لأية دالة محدودة $|\varphi(\xi)| < M$ عند $t > 0$ الحل المحدود لمعادلة التوصيل الحرارى الملامس باتصال عند $t = 0$ للدالة $\varphi(x)$ في كل نقط اتصال هذه الدالة .

نثبت في البداية المأخوذة التالية (المبدأ المعمم للترابك) :

إذا كانت الدالة $U(x, t, \alpha)$ تحقق بالمتغيرين (x, t) المعادلة التفاضلية الخطية

$$L(U) = 0$$

لأى قيمة مثبتة للبارامتر α فإن التكامل

$$u(x, t) = \int U(x, t, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha$$

يكون أيضا حلا لنفس المعادلة $L(u) = 0$ إذا كانت المشتقات الداخلة في المؤثر التفاضلى الخطى $L(U)$ يمكن حسابها بواسطة التفاضل تحت علامة التكامل .

وإثبات المأخوذة هذه بسيط للغاية . فالمؤثر التفاضلى الخطى $L(U)$ هو عبارة عن مجموع مشتقات الدالة U بمعاملات ما تعتمد على x و t . وعملية تفاضل الدالة u يمكن إجراؤها حسب الفرض تحت علامة التكامل . والمعاملات أيضا

يمكن إدخالها تحت علامة التكامل. ومن هنا يتبع أن

$$L(u) = \int L(U(x, t, \alpha)) \varphi(\alpha) d\alpha = 0,$$

أى أن الدالة $u(x, t)$ تحقق المعادلة $L(u) = 0$.

ونذكر القارئ بالشروط الكافية لقابلية التفاضل تحت علامة التكامل المعتمد على بارامتر.

الدالة

$$F(x) = \int_a^b f(x, \alpha) d\alpha$$

تكون لقيم الحدين a, b النهائية قابلة للتفاضل تحت علامة التكامل إذا كان $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha)$ يعتبر دالة متصلة في المتغيرين x, α في منطقة تغيرهما (انظر كتاب سيسكونوف «التفاضل والتكامل» الجزء الأول والثاني باللغة العربية طبعة دار «مير»).

وليس من الصعب أيضا أن نلاحظ أن الدالة

$$F_1(x) = \int_a^b f(x, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha$$

لقيم الحدين a, b النهائية تكون قابلة للتفاضل تحت علامة التكامل بنفس الشروط المفروضة على الدالة $f(x, \alpha)$ ولأية دالة محدودة (وحتى قابلة للتكامل مطلقا) $\varphi(\alpha)$. وإذا كان حدا التكامل لانهائيين فإن هذه الحالة تتطلب ضرورة التقارب المنتظم للتكامل الناتج بعد تفاضل الدالة المكاملة بالنسبة إلى البارامتر (انظر المرجع السابق).

وهذه الملاحظات تسرى أيضا على التكاملات المكررة المعتمدة على البارامترات.

وللمعادلات الخطية $L(u) = 0$ يتحقق مبدأ التراكب الذى ينحصر فى أن الدالة

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n C_i u_i(x, t),$$

للمثلة فى صورة مجموع عدد محدود من الحلول الخاصة، تعتبر أيضا حلا للمعادلة.

وإذا كان لدينا الحل $u(x, t, \alpha)$ المعتمد على البارامتر فإن المجموع التكامل

$$\sum u(x, t, \alpha_n) C_n \quad (C_n = \varphi(\alpha_n) \Delta \alpha) \quad (14)$$

يعتبر أيضا حلا للمعادلة $L(u) = 0$. والمأخوذة المثبتة مثلها مثل المأخوذة المثبتة في صفحة ١٠٨ تؤكد الشروط التي عندها تعتبر نهاية المجموع (14) وهي في حالتنا تساوى

$$u(x, t) = \int U(x, t, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha,$$

حلا للمعادلة $L(u) = 0$ أيضا. ومن جهة النظر هذه من الطبيعي أن تسمى المأخوذة المثبتة كالمأخوذة التي في صفحة ١٠٨ بالبدا المعم للتراب.

نعود إلى دراسة التكامل (12'). ثبت أولا أنه إذا كانت الدالة $\varphi(x)$ محدودة $|\varphi(x)| < M$. فإن التكامل (12') يتقارب ويعبر عن دالة محدودة. بالفعل

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &< M \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \\ &= M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = M \left(\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}} \right). \end{aligned}$$

وذلك لأن

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}.$$

وبعد ذلك ثبت أن التكامل (12') يحقق معادلة التوصيل الحرارى عند $t > 0$. ولهذا الغرض يكفي إثبات أن مشتقات هذا التكامل عند $t > 0$ يمكن حسابها بواسطة عملية التفاضل تحت علامة التكامل.

وفي حالة حدود التكامل المحدودة (النهائية) يكون ذلك قانونيا لأن كل مشتقات الدالة

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

عندما $t > 0$ تكون متصلة. وإمكانية إجراء التفاضل تحت علامة التكامل في حالة حدود التكامل اللانهائية يكفي التأكد من التقارب المنتظم للتكامل الناتج بعد

إجراء التفاضل تحت علامة التكامل . نجرى هذا البحث على مثال المشتقة الأولى بالنسبة إلى x .

وهكذا فلائبات قابلية تفاضل الدالة (12) بالنسبة إلى x وكذلك المتساوية

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (G(x, \xi, t)) \varphi(\xi) d\xi$$

يكفى إثبات التقارب المنتظم للتكامل في الطرف الأيمن للمتساوية السابقة . وعند ذلك فلائبات قابلية التفاضل في النقطة (x_0, t_0) . يكفى إثبات التقارب المنتظم للتكامل في منطقة ما من مناطق قيم المتغيرات تحتوى القيمتين محل البحث (x_0, t_0) . على سبيل المثال في المنطقة

$$t_1 \leq t_0 \leq t_2, |x| \leq \bar{x}.$$

والشرط الكافي للتقارب المنتظم للتكامل (مثل اختبار التقارب المنتظم للمتسلسلة) يعتبر هو وجود الدالة الموجبة $F(\xi)$ التي لا تعتمد على البارامترين (x, t) والتي تحد من أعلى الدالة

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) \right| \leq F(\xi), \quad \xi > \bar{x}, \quad \xi < -\bar{x}, \quad (15)$$

ويتقارب تكاملها :

$$\int_{x_1}^{\infty} F(\xi) d\xi < \infty, \quad \int_{-\infty}^{x_1} F(\xi) d\xi < \infty. \quad (15')$$

ويرمز المقدار x_1 إلى عدد ما تتحقق ابتداء منه المتباينة (15) .

نعين التقدير من أعلى للقيمة المطلقة الكاملة في علاقة $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi, t) \right| \cdot |\varphi(\xi)| &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi - x|}{2|a^2 t|^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |\varphi(\xi)| \leq \\ &\leq \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi| + \bar{x}}{2|a^2 t_1|^{3/2}} e^{-\frac{(\xi - \bar{x})^2}{4a^2 t_2}} = F(\xi) \end{aligned} \quad (16)$$

لقيم $\xi < \bar{x}$ ولأى $t_1 \leq t \leq t_2, |x| \leq \bar{x}$. لا يصعب التأكد من تقارب التكامل $F(\xi)$ للدالة (15') . فالتكامل

$$\int_{x_1}^{\infty} F(\xi) d\xi = \int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi| + \bar{x}}{2[a^2 t_1]^{1/2}} e^{-\frac{(\xi - \bar{x})^2}{4a^2 t_1}} d\xi = \int_{x_1 - \bar{x}}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\xi_1 + 2\bar{x}}{2[a^2 t_1]^{1/2}} e^{-\frac{\xi_1^2}{4a^2 t_1}} d\xi_1$$

$$(\xi_1 = |\xi| - \bar{x})$$

يتقارب لأنه يوجد تحت علامة التكامل عامل على الصورة $e^{-\xi_1^2/(4a^2 t_1)}$. ومن هنا نستنتج أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \xi, t) \phi(\xi) d\xi.$$

وبالمثل تماماً يتم إثبات إمكانية حساب كل المشتقات الباقية بالتفاضل تحت علامة التكامل . وبذلك أثبتنا أن الدالة (12') تحقق معادلة التوصيل الحرارى .
وننتقل الآن إلى الخاصية الأساسية للتكامل (12') وبالذات نثبت أن

$$t \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0 \quad \text{عندما} \quad u(x, t) \rightarrow \phi(x_0)$$

في جميع نقط اتصال الدالة $\phi(x)$.

وهكذا نفرض أن $\phi(x)$ دالة متصلة في نقطة ما x_0 . يجب أن نثبت أن

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} u(x, t) = \phi(x_0),$$

أى مهما كان العدد $\varepsilon > 0$ يمكن تعيين ذلك العدد $\delta(\varepsilon)$ بحيث إن

$$|u(x, t) - \phi(x_0)| < \varepsilon,$$

عندما

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad |t| < \delta(\varepsilon).$$

ووفقاً للاتصال المفترض للدالة $\phi(x)$ في النقطة x_0 ، يوجد ذلك العدد $\eta(\varepsilon)$

بحيث إن

$$|\phi(x) - \phi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\theta}, \quad (17)$$

عندما

$$|x - x_0| < \eta.$$

وبتقسيم فترة التكامل إلى أجزاء نعبر عن $u(x, t)$ في صورة مجموع ثلاثة حدود :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_0} \dots d\xi + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \dots d\xi = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t), \quad (18)$$

حيث

$$x_1 = x_0 - \eta, \quad x_2 = x_0 + \eta.$$

والحد الأساسي في هذا المجموع u_2 يمكن التعبير عنه في الصورة :

$$u_2(x, t) = \frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)] d\xi = I_1 + I_2.$$

والتكامل I_1 يحسب مباشرة :

$$I_1 = \frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{a^2 t}} d\xi = \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

حيث

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}}, \quad d\alpha = \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}}. \quad (19)$$

وبمجرد أن يصبح $|x - x_0| < \eta$ يصبح الحد العلوي للتكامل موجبا والحد السفلي سالبا . وعندما $t \rightarrow 0$ يؤول الحد العلوي إلى $+\infty$ والسفلي إلى $-\infty$. ومن هنا يتج η

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} I_1 = \varphi(x_0).$$

وبذلك يمكن تعيين ذلك العدد δ_1 بحيث إن

$$|I_1 - \varphi(x_0)| < \frac{\epsilon}{6}. \quad (20)$$

عندما يكون فقط

$$|x - x_0| < \delta_1, \quad |t| < \delta_1.$$

نوضح أن التكاملات u_2 , u_3 , I_2 صغيرة. نقدر قبل كل شيء التكامل I_2 :

$$|I_2| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| d\xi.$$

ومن المتساوية (18) يتضح أنه عندما

$$x_1 < \xi < x_2$$

تتحقق المتباينة

$$|\xi - x_0| < \eta.$$

وبالاستعانة بالمتباينة (17) وكذلك بأن

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-a^2} da < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2} da = 1,$$

مهما كان العددا x'' , x' نحصل على:

$$|I_2| \leq \frac{\epsilon}{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{\epsilon}{6} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-a^2} da < \frac{\epsilon}{6}, \quad (21)$$

حيث يعرف المتغير الجديد a بالعلاقة (19). نقدر

$$|u_3(x, t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \int_{x_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \right| < \\ < \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-a^2} da \rightarrow 0 \quad , \quad \begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0 \end{matrix} \quad (22)$$

وبالمثل

$$|u_1(x, t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \right| < \\ < \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-a^2} da \rightarrow 0 \quad , \quad \begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0 \end{matrix} \quad (23)$$

وحيث إنه عندما $x \rightarrow x_0$ فإن $x_2 - x > 0$ و $x_1 - x < 0$ وعندما $t \rightarrow 0$ فإنه في الحدين الأخيرين في (23)، (22) تتول النهاية السفلى للتكامل والنهاية العليا له على الترتيب إلى $-\infty$ ، $+\infty$. وبالتالي يمكن تعيين ذلك العدد δ_2 بحيث إن

$$|u_3(x, t)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad |u_1(x, t)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad (24)$$

إذا كان فقط

$$|x - x_0| < \delta_2, \quad |t| < \delta_2.$$

وبالاستعانة بالتقديرين الناتجين أعلاه (23)، (22) نحصل على :

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \varphi(x_0)| &\leq |u_1| + |I_1 - \varphi(x_0)| + I_2 + |u_3| \leq \\ &\leq |u_1| + |I_1 - \varphi(x_0)| + |I_2| + |u_3| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned} \quad (25)$$

إذا كان فقط

$$|x - x_0| < \delta, \quad |t| < \delta,$$

حيث δ يساوى أصغر العددين δ_1 ، δ_2 .

وبذلك أثبتنا أن الدالة

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \quad (12')$$

محدودة وتحقق معادلة التوصيل الحرارى والشرط الابتدائى .

وإذا أعطيت القيمة الابتدائية ليس عند $t = 0$ وإنما عند $t = t_0$ فإن صيغة $u(x, t)$ تأخذ الشكل :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 (t-t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-t_0)}} \varphi(\xi) d\xi. \quad (12'')$$

ووحداية الحل الناتج للدالة المتصلة $\varphi(x)$ نتج من النظرية المثبتة فى بند ٢،
فقرة ٣. وإذا كانت الدالة الابتدائية $\varphi(x)$ لها عدد محدود من نقاط الانفصال فإن التكامل (12'') يمثل الحل المحدود للمعادلة (1) المتصل فى كل النقاط فيما عدا نقاط انفصال الدالة $\varphi(x)$ *.

* بالاستعانة بالطريقة المشروحة فى بند ٢ - ٣ يمكن التأكد من أن الدالة $u(x, t)$ تتحدد بالشروط المذكورة تحديدا أحادى القيمة.

ندرس كمثال المسألة التالية :

عين حل معادلة التوصيل الحرارى إذا كانت درجة الحرارة الابتدائية (عند $t = t_0 = 0$) لها قيمتان ثابتتان ولكنها مختلفتان عند $x < 0$ و $x > 0$ أى

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 & , \quad x > 0, \\ T_2 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

بالاستعانة بالعلاقة (12') نحصل على حل المسألة فى الصورة :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} = \\ &= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \\ &= \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha, \quad (26) \end{aligned}$$

لأن

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-z} e^{-\alpha^2} d\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-z} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^0 e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha \left(z = \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}} \right). \end{aligned}$$

وكحالة خاصة إذا كان

$$T_2 = 0, \quad T_1 = 1,$$

فإن

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha \right) \left(z = \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}} \right).$$

إن المقطع الجانبي لدرجة الحرارة في اللحظة t يعطى بالمنحنى

$$f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

حيث z هي الإحداثى الأفقى للنقطة التى تحدد عندها درجة الحرارة إذا أخذنا كوحدة الطول فى ارتباطها بالزمن t القيمة $2\sqrt{\alpha^2 t}$. وتكوين (رسم) هذا المنحنى لا يشكل صعوبة لأن التكامل

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

الذى يسمى عادة بتكامل الأخطاء يقابلنا كثيرا فى نظرية الاحتمالات ويوجد له جداول مفصلة*

ويمكن كتابة العلاقة (26) لأية قيمتين اختيارييتين T_1 , T_2 على الصورة :

$$u(x, t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{2} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha^2 t}}\right).$$

ومن هنا يتضح أنه فى النقطة $x=0$ تكون درجة الحرارة طول الوقت ثابتة ومساوية لنصف مجموع قيمتى درجة الحرارة الابتدائيتين على اليسار وعلى اليمين وذلك لأن $\Phi(0) = 0$.

وحل المعادلة غير المتجانسة

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (-\infty < x < \infty, t > 0)$$

بالشروط الابتدائية الصفرية

$$u(x, 0) = 0,$$

من الواضح انه يجب التعبير عنه بالعلاقة

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (27)$$

كما ينتج ذلك من معنى الدالة $G(x, \xi, t)$ (انظر فقرة ٤ - بند ٢). ولن نقوم

* انظر الجداول فى نهاية الجزء الثانى من الكتاب.

بدراسة هذه العلاقة بالتفصيل وكذلك شروط تطبيقها التى يجب أن تحققها الدالة $f(x, t)$.

فقرة ٢ : المسائل الحدية للمستقيم نصف اللانهاي . كما سبق أن ذكرنا فى بند ١ ، فقرة ٤ ، عندما يهمننا توزيع درجات الحرارة بالقرب من أحد طرفى القضيب ويكون تأثير الطرف الآخر غير جوهري فإننا نعتبر أن هذا الطرف (الثانى) موجود فى المالا نهاية . وهذا يؤدي إلى مسألة تعيين حل معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

على المستقيم نصف اللانهاي $x > 0$ لقيم $t > 0$ التى تحقق الشرط الابتدائي

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (x > 0)$$

والشرط الحدى الذى يؤخذ وفقا لطبيعة النظام الحدى المعطى على إحدى الصور التالية :

$$(المسألة الحدية الأولى) \quad u(0, t) = \mu(t)$$

$$(المسألة الحدية الثانية) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = v(t)$$

أو

$$(المسألة الحدية الثالثة) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda [u(0, t) - \theta(t)]$$

وفى المستقبل سنكتفى بالبحث التفصيلي للمسألة الحدية الأولى فقط التى تنحصر فى تعيين حل معادلة التوصيل الحرارى بالشروط الإضافية التالية :

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu(t). \quad (28)$$

ولكى نحدد شروط المسألة حلا وحيدا لا بد من إضافة بعض الشروط الأخرى فى المالا نهاية . تتطلب بمثابة الشرط الإضافي أن تكون الدالة $u(x, t)$ محدودة فى كل مكان :

$$|u(x, t)| < M, \quad 0 < x < \infty, \quad t \geq 0,$$

حيث M ثابت ما . ومن هنا ينتج أن الدالة الابتدائية $\varphi(x)$ يجب أيضا أن تحقق شرط المحدودية $|\varphi(x)| < M$.

وحل المسألة المصاغة يمكن التعبير عنه في صورة المجموع

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

حيث $u_1(x, t)$ تعبر فقط عن تأثير الشروط الابتدائية و $u_2(x, t)$ تعبر عن تأثير الشرط الحدى فقط . ويمكن تعيين هاتين الدالتين كحليين للمعادلة (1) يحققان الشروط التالية :

$$u_1(x, 0) = \varphi(x), \quad u_1(0, t) = 0, \quad (28')$$

$$u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(0, t) = \mu(t). \quad (28'')$$

ومن الواضح أن مجموع هاتين الدالتين سيعقق الشرطين (28) . ثبت في البداية مأخوذتين متعلقتين بالدالة $u(x, t)$ المعرفة بتكامل بواسون

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi) d\xi. \quad (29)$$

١ - إذا كانت الدالة $\psi(x)$ دالة فردية أى أن

$$\psi(x) = -\psi(-x),$$

فإن الدالة (29)

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi) d\xi$$

تؤول إلى الصفر عندما $x = 0$:

$$u(0, t) = 0.$$

وعند ذلك يفترض بالطبع أن التكامل المعرف للدالة $u(x, t)$ مقارب . وذلك يتحقق إذا كانت $\psi(x)$ محدودة . والدالة المكاملة في التكامل

$$u(0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \psi(\xi) d\xi$$

دالة فردية بالنسبة إلى ξ لأنها تعتبر حاصل ضرب دالة فردية في دالة زوجية . والتكامل المأخوذ لدالة فردية بحدى تكامل متماثلين بالنسبة إلى نقطة الأصل يساوى الصفر وبالتالي فإن

$$u(0, t) = 0,$$

وهو ما يثبت المأخوذة .

٢ - إذا كانت الدالة $\psi(x)$ دالة زوجية أى أن

$$\psi(x) = \psi(-x),$$

فإن مشتقة الدالة $u(x, t)$ من العلاقة (29) تكون مساوية للصفر عندما $x = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$$

لجميع قيم $t > 0$.

بالفعل

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)}{2(a^2t)^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \psi(\xi) d\xi \Big|_{x=0} = 0,$$

لأنه عند $x = 0$ تكون الدالة المكاملة دالة فردية إذا كانت $\psi(\xi)$ دالة زوجية .

وننتقل الآن الى تكوين الدالة $u_1(x, t)$ التى تحقق الشروط (28') .

ندرج دالة مساعدة $U(x, t)$ معرفة على المستقيم اللانهاى $-\infty < x < \infty$ وتحقق المعادلة وكذلك الشروط

$$U(0, t) = 0,$$

$$U(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{...} \quad x > 0.$$

وهذه الدالة يمكن بمساعدة المأخوذة تعريفها بواسطة الدالة الابتدائية $\Psi(x)$ التى تنطبق على $\varphi(x)$ فى حالة $x > 0$ وتعتبر امتدادا فرديا للدالة $\varphi(x)$ لقيم $x < 0$ أى

$$\Psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x > 0, \\ -\varphi(-x) & x < 0, \end{cases}$$

ومن ثم فإن :

$$U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \Psi(\xi) d\xi.$$

وبدراسة قيم الدالة $U(x, t)$ فقط فى المنطقة التى تهما $x \geq 0$ نحصل على :

$$u(x, t) = U(x, t) \quad , \quad x \geq 0.$$

وبالاستعانة بتعريف الدالة $\Psi(x)$ منحصل على :

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Psi(\xi) d\xi = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

علما بأننا أجرينا في التكامل الأول التعويض $\xi = -\xi$ واستعنا بالتساوية

$$\Psi(\xi) = -\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi').$$

وبتجميع التكاملين معا نحصل على الدالة المطلوبة

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} \varphi(\xi) d\xi \quad (30)$$

في صورة لا تحتوي على الدوال المساعدة. ونشير إلى أنه عندما $x=0$ تكون الصيغة بين القوسين الكبيرين إلى الصفر ويكون $u_1(0, t) = 0$.

وبالاستعانة بالمأخوذة ٢ لا يصعب التأكد من أن حل معادلة التوصيل الحرارى بالشروط الحدى المتجانس من النوع الثانى $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x}(0, t) = 0$ والشروط الابتدائى $\bar{u}_1(x, 0) = \varphi(x)$ يعبر عنه على الصورة :

$$\bar{u}_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} \varphi(\xi) d\xi. \quad (30')$$

نطبق العلاقة الناتجة لحل مسألة تبريد قضيب مسخن بانتظام يحتفظ على حدوده بدرجة حرارة ثابتة نعتبرها مساوية للصفر. وتنحصر المسألة في تعيين حل معادلة التوصيل الحرارى الذى يحقق الشرطين

$$v_1(x, t_0) = T, \quad v_1(0, t) = 0.$$

والأخذ في الاعتبار أن الشرط الابتدائى معطى لا عندما $t = 0$ وإنما عندما $t = t_0$ نحصل بدلا من العلاقة (30) على :

$$v_1(x, t) = \frac{T}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{a^2(t-t_0)}}. \quad (31)$$

وبتقسيم التكامل إلى حدين وإدخال المتغيرين

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \quad \alpha_1 = \frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}},$$

نحصل على

$$v_1(x, t) = T\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right), \quad (31)$$

حيث

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$$

هو تكامل الأخطاء .

وننتقل الآن إلى البحث عن الدالة $u_2(x, t)$ التي تمثل الجزء الثاني من حل المسألة الحدية الأولى .

نفرض أن

$$\mu(t) = \mu_0 = \text{const.}$$

والدالة

$$\bar{v}(x, t) = \mu_0 \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) \quad (32)$$

تعتبر حلاً لمعادلة التوصيل الحراري يحقق الشرطين

$$\bar{v}(x, t_0) = \mu_0, \quad \bar{v}(0, t) = 0.$$

ومن هنا يتبع أن الدالة

$$v(x, t) = \mu_0 - \bar{v}(x, t) = \mu_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) \right] \quad (33)$$

تعتبر هي الدالة المطلوب تعيينها لأنها تحقق نفس المعادلة والشرطين

$$v(x, t_0) = 0 \quad (x > 0), \quad v(0, t) = \mu_0 \quad (t > t_0).$$

نعبر عن $v(x, t)$ في الصورة

$$v(x, t) = \mu_0 U(x, t - t_0),$$

حيث

$$U(x, t - t_0) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \quad (34)$$

هي حل نفس المسألة كالدالة $v(x, t)$ عندما $\mu_0 = 1$.

ووفقا للتعريف يكون للدالة $U(x, t - t_0)$ معنى فقط عندما $t \geq t_0$. نكمل تعريف هذه الدالة بفرض

$$U(x, t - t_0) = 0, \quad t < t_0.$$

ومن الواضح أن هذا التعريف يتفق مع قيمة الدالة $U(x, t)$ عندما $t = 0$ والدالة المعروفة بهذه الطريقة مستحق معادلة التوصيل الحرارى لجميع قيم t عندما $x > 0$. والقيمة الحدية لهذه الدالة (عندما $x = 0$) تعتبر دالة متدرجة (step function) تساوى الصفر عندما $t < t_0$ وتساوى الواحد الصحيح عندما $t > t_0$. والدالة $U(x, t)$ تقابلنا كثيرا في التطبيقات وتعتبر حلقة مساعدة لتعيين الدالة $u_2(x, t)$.

ندرس المسألة المساعدة الثانية التى تنحصر في تعيين حل معادلة التوصيل الحرارى بالشروط الابتدائية والحدية التالية :

$$v(x, t_0) = 0, \quad v(0, t) = \mu(t) = \begin{cases} \mu_0 & t_0 < t < t_1, \\ 0 & t > t_1. \end{cases}$$

ويمكن التحقق مباشرة من أن

$$v(x, t) = \mu_0 [U(x, t - t_0) - U(x, t - t_1)].$$

ويوجه عام إذا كانت الدالة الحدية $\mu(t)$ مغطاة في صورة دالة متدرجة

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0 & t_0 < t \leq t_1, \\ \mu_1 & t_1 < t \leq t_2, \\ \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & t_{n-1} < t \leq t_n, \end{cases}$$

فإنه بتجليل الموضوع تماما كما سبق نجد أن حل المسألة الحدية يمثل هذه الدالة $\mu(t)$ يمكن كتابته على الصورة :

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i [U(x, t - t_i) - U(x, t - t_{i+1})] + \mu_{n-1} U(x, t - t_{n-1}). \quad (35)$$

وبالاستعانة بنظرية المتغير المحدود نحصل على :

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-2} \mu_i \left. \frac{\partial U(x, t-\tau)}{\partial t} \right|_{\tau_i} \Delta \tau + \mu_{n-1} U(x, t-t_{n-1}) \quad (36)$$

لقيم $t_i \leq \tau_i \leq t_{i+1}$

ننتقل الآن إلى مسألة تعيين $u(x, t)$ حل معادلة التوصيل الحرارى بالشرط الابتدائى الصفرى والشرط الحدى

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (t > 0),$$

حيث $\mu(t)$ أية دالة متقطعة الاتصال . والحل التقريبى لهذه المسألة يسهل الحصول عليه فى الصورة (36) إذا استبدلنا الدالة $\mu(t)$ بدالة متقطعة الثبات . وبالاتقال إلى النهاية عند تناقص فترات ثبات الدالة المساعدة نجد أن نهاية المجموع (36) تكون مساوية :

$$\int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-\tau) \mu(\tau) d\tau,$$

وذلك لأنه عندما $x > 0$ يكون

$$\lim_{t-t_{n-1} \rightarrow 0} \mu_{n-1} U(x, t-t_{n-1}) = 0.$$

ومن الواضح أن الحل المطلوب $u_2(x, t)$ للمسألة الثانية يجب أن يساوى

$$u_2(x, t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-\tau) \mu(\tau) d\tau. \quad (37)$$

ولن نتوقف عند تفصيل قانونية الانتقال إلى النهاية وتوضيح شروط تطبيق هذه العلاقة بالنسبة إلى الدالة $\mu(\tau)$. ولا يصعب التأكد من أن

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}} e^{-\alpha^2} d\alpha \right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{a^2 x}{[a^2 t]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = \\ &= -2a^2 \frac{\partial G}{\partial x}(x, 0, t) = 2a^2 \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \left(G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \right). \end{aligned}$$

وبذلك فالحل المطلوب تعيينه في حالة الدالة الاختيارية $\mu(t)$ يمكن التعبير عنه على الصورة

$$u_2(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\left[\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]} \mu(\tau) d\tau$$

$$u_2(x, t) = 2a^2 \int_0^t \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, 0, t-\tau) \mu(\tau) d\tau. \quad (38)$$

ونشير إلى أنه في خلال عملية الحصول على العلاقة (38) لم نستخدم في أى مكان الخواص لمعادلة التوصيل الحرارى فيما عدا خطيتها. كما أننا لم نستخدم أيضا العلاقة التحليلية للدالة $U(x, t)$ وإنما استخدمنا فقط أنها تحقق الشروط الحدية والابتدائية :

$$U(0, t) = 1 \quad , \quad t > 0,$$

$$U(x, 0) = 0 \quad , \quad x > 0$$

أو

$$U(0, t) = \begin{cases} 1 & , \quad t > 0, \\ 0 & , \quad t < 0. \end{cases}$$

ومن الواضح أنه إذا كنا نريد حل أية معادلة تفاضلية خطية بالشروط الحدى

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (t > 0),$$

والشروط الابتدائية الصفرية والشروط الحدية الإضافية الصفرية إن وجدت (مثلا عند $x=l$) فإن حل مثل هذه المسألة يمكن التعبير عنه في الصورة

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial \xi}(x, t-\tau) \mu(\tau) d\tau, \quad (39)$$

حيث $U(x, t)$ حل المسألة الحدية المائلة عندما

$$U(0, t) = 1.$$

هذا التعبير عن حل المسألة الحدية الأولى بالشروط الابتدائية الصفرية معطى هنا لسهولة المقارنة مع حل نفس هذه المسألة الناتج في الباب الثانى من الكتاب الثانى * بند 4 بطريقة أخرى.

والمبدأ المصاغ هنا يسمى بمبدأ دوهاميل ويوضح أن الصعوبة الأساسية عند حل المسائل الحدية يشكلها ثبات القيمة الحدية . وإذا حلت المسألة الحدية بالقيمة الحدية الثابتة فإن حل المسألة الحدية بالقيمة الحدية المتغيرة يعطى بالعلاقة (39) . وكثيراً ما يستخدم هذا المبدأ عند حل كثير من المسائل الحدية بتحويل الحل إلى الحل للشرط الحدى الثابت فقط دون ذكر أن حل المسألة الحدية بالشرط المتغير $\mu(t)$ يعطى بالعلاقة (39) .

ومجموع الدالتين

$$u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

يعطى حل المسألة الحدية الأولى للمستقيم نصف اللانهائى للمعادلة المتجانسة . وبلاستعانة بالعلاقة (27) فقرة ١ ، بند ٣ ومبدأ الاستكمال غير الزوجى لا يصعب التأكد من أن حل المعادلة غير المتجانسة

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (0 < x < \infty, t > 0)$$

للشرط الابتدائى الصفرى والشرط الحدى الصفرى ($u(0, t) = 0$) يعطى بالعلاقة

$$u_3(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (40)$$

والمجموع

$$u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) = u(x, t)$$

يعطى حل المسألة الحدية الأولى

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \\ u(0, t) = \mu(t), \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

بند ٤ - المسائل بدون شروط ابتدائية

إذا كانت عملية التوصيل الحرارى تدرس فى لحظة بعيدة بعدا كافيا عن اللحظة الابتدائية فإن تأثير الشروط الابتدائية لا ينعكس على توزيع درجة الحرارة فى اللحظة التى تم فيها ملاحظة ودراسة العملية . وفى هذه الحالة تطرح مسألة

تعيين حل معادلة التوصيل الحرارى الذى يحقق الشروط الحدية من أحد الأنواع الثلاثة المعطاة لجميع قيم $t > -\infty$. وإذا كان القضيبي محدودا تعطى الشروط الحدية على طرفيه الاثنى: وللقضيب نصف اللانهاى يعطى شرط حدى واحد فقط.

ندرس المسألة الحدية الأولى للقضيبي نصف اللانهاى:
 عين الحل المحدود لمعادلة التوصيل الحرارى فى المنطقة $x > 0$ الذى يحقق الشرط

$$u(0, t) = \mu(t), \quad (1)$$

حيث $\mu(t)$ دالة معطاة. ويفترض أن الدالتين $\mu(t)$, $u(x, t)$ محدودتان فى كل مكان أى أن

$$|u(x, t)| < M,$$

$$|\mu(t)| < M.$$

وكما سنوضح فيما بعد تعرف الدالة $u(x, t)$ تعريفاً أحادى القيمة. نأخذ حالة الشرط الحدى الأكثر ذيوعا:

$$\mu(t) = A \cos \omega t. \quad (2)$$

وقد بحث هذه المسألة فورييه وطبقت لأول مرة لتعيين الدبذبات الحرارية للتربة*.

نكتب الشرط الحدى على الصورة

$$\mu(t) = A e^{i\omega t}. \quad (2')$$

ومن خطية معادلة التوصيل الحرارى يتبع أن الجزء الحقيقى والجزء التخيلى لحل مركب ما لمعادلة التوصيل الحرارى يحقق كل منها على حدة نفس هذه المعادلة.

وإذا عين حل معادلة التوصيل الحرارى الذى يحقق الشرط (2') فإن جزؤه الحقيقى يحقق الشرط (2) والجزء التخيلى يحقق الشرط

$$u(0, t) = \mu_1(t) = A \sin \omega t.$$

* انظر للملحق ١.

وهكذا ندرس المسألة :

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) &= A e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3)$$

وسنبحث عن حلها في الصورة :

$$u(x, t) = A e^{\alpha x + \beta t}, \quad (4)$$

حيث α, β ثابتان لم يحددا بعد .

بالتعويض عن الصيغة (4) في المعادلة (3) والشرط الحدى نجد أن

$$\alpha^2 = \frac{1}{a^2} \beta, \quad \beta = i\omega,$$

ومن هنا

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}} \sqrt{i} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}} \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = \\ &= \pm \left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} \right]. \end{aligned}$$

وللدالة $u(x, t)$ لدينا

$$u(x, t) = A e^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + i \left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + \omega t \right)}. \quad (5)$$

والجزء الحقيقي لهذا الحل

$$u(x, t) = A e^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x} \cos \left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + \omega t \right) \quad (6)$$

يحقق معادلة التوصيل الحرارى والشرط الحدى (2). والعلاقة (6) وفقا لاختيار الإشارة لا تحدد دالة واحدة فقط وإنما تحدد دالتين ، ولكن الدالة المناظرة للإشارة السالبة هي فقط التي تحقق شرط المحدودية . وبذلك فحل المسألة المطروحة نحصل عليه في الصورة :

$$u(x, t) = A e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x} \cos \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + \omega t \right). \quad (7)$$

وبالمثل تحل المسألة بدون شروط ابتدائية للمستقيم المحدود :

$$\left. \begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) &= A \cos \omega t, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

وبإعادة كتابة الشرط الحدى فى الصورة :

$$u(0, t) = Ae^{-i\omega t}, \quad u(l, t) = 0,$$

نبحث عن الحل فى الصورة :

$$u(x, t) = X(x) e^{-i\omega t}. \quad (9)$$

وبالتعويض عن هذه الصيغة فى المعادلة (8) نحصل للدالة $X(x)$ على المعادلة

$$X'' + \gamma^2 X = 0 \quad \text{أو} \quad X'' + \frac{i\omega}{a^2} X = 0$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{i\omega}{a^2}} = \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} (1 + i) \quad (10)$$

والشروط الإضافية

$$X(0) = A, \quad X(l) = 0. \quad (11)$$

ومن هنا نحصل للدالة $X(x)$ على

$$X(x) = A \frac{\sin \gamma(l-x)}{\sin \gamma l} = X_1(x) + iX_2(x), \quad (12)$$

حيث X_1, X_2 الجزءان الحقيقى والتخيلى للدالة $X(x)$. وللدالة $u(x, t)$ نحصل على الصيغة

$$u(x, t) = A \frac{\sin \gamma(l-x)}{\sin \gamma l} e^{-i\omega t}. \quad (13)$$

وبفصل الجزء الحقيقى للدالة $u(x, t)$ نعين حل المسألة الأصلية بدون شروط ابتدائية فى الصورة :

$$u(x, t) = X_1(x) \cos \omega t + X_2(x) \sin \omega t. \quad (14)$$

ولا نعطى هنا الصيغة الصريحة لكل من الدالتين X_1, X_2 رغم أن ذلك لا يصعب عمله.

وإذا كانت الدالة الحدية عبارة عن تركيبة من التوافقيات ذات الترددات المختلفة فإن حل هذه المسألة يمكن الحصول عليه بوصفه تراكباً للحلول المناظرة للتوافقيات كل على حدة.

نتيجة وحدانية حل المسألة بدون شروط ابتدائية للمستقيم نصف اللانهائي . مستطلي من العلاقة

$$u(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} u(0, \tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right\} u(\xi, t_0) d\xi = I_1 + I_2 \quad (15)$$

$(t \geq t_0),$

التي نعبر عن أي حل محدود لمعادلة التوصيل الحراري بدلالة قيمته الابتدائية $u(x, t_0)$ وقيمته الحدية $u(0, t) = \mu(t)$ في المنطقة $x \geq 0, t \geq t_0$.

نوضح أن

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} I_2(x, t) = 0, \quad (16)$$

إذا كان فقط

$$|u(x, t)| < M$$

أي. t بالفعل ،

$$|I_2| < \frac{M}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\int_0^\infty e^{-a_1^2} da_1}{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}} - \frac{\int_0^\infty e^{-a_2^2} da_2}{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}} \right\} = \\ = \frac{M}{\sqrt{\pi}} 2 \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}} e^{-a^2} da,$$

حيث

$$a_1 = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \quad a_2 = \frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}.$$

ومن هنا نتج العلاقة (16) لأن x, t مستثنان و $t_0 \rightarrow -\infty$. وإذا ثبتنا x, t في العلاقة (15) وجعلنا $t_0 \rightarrow -\infty$ فإن $u(x, t)$ ستكون مساوية لنهاية الحد الأول فقط ونحصل على العلاقة

$$u(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau, \quad (17)$$

التي تثبت أنه لا يمكن وجود حلين مختلفين لمسألةنا . ويمكن أيضا إثبات أنه لأية دالة متقطعة الاتصال $\mu(t)$ تعبر العلاقة (17) عن حل المسألة المصاغة

وبالمثل يمكن بحث المسألة بدون شروط ابتدائية للمستقيم الحدود $(0 \leq x \leq l)$. وهذه المسألة بدون شرط الحدودية. يكون لها حل متعدد القيم لأن الدوال

$$u_n(x, t) = C e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \alpha^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

لأى n تعبر عن حل هذه المسألة بالقيم الحدية الصفرية . غير أن مثل هذا الحل يكون عندما $\infty \rightarrow t$ غير محدود . ولا بشكل إثبات وحدانية الحل المحدود للمسألة المصاغة أية صعوبة .

مسائل على الباب الثالث

١- عين دالة تأثير المصدر الحرارى المحلى التقطى للفضيب :

- (أ) للفضيب نصف اللانهاى بالشروط الحدية من النوع الأول والنوع الثانى وعند انعدام التبادل الحرارى على السطح الجانبى .
 (ب) للفضيب اللانهاى عند وجود التبادل الحرارى على السطح الجانبى .
 (ج) للفضيب نصف اللانهاى عند وجود تبادل حرارى على السطح الجانبى وبالشروط الحدية من النوع الأول والثانى .

٢- عين دالة تأثير المصدر الحرارى المحلى التقطى للفضيب نصف اللانهاى ذى السطح الجانبى المعزول حراريا للمسألة الحدية الثالثة (بالشروط الحدى على الصورة $f(t)$)
 $\left(-\frac{\partial u}{\partial x} = hu(0, t) = f(t)\right)$.

- ٣- حل معادلة التوصيل الحرارى للحالات (أ) . (ب) . (ج) فى المسألة ١ إذا كان :
 (١) فى النقطة $x = x_0$ يؤثر مصدر الحرارة $Q = Q(t)$ وكحالة خاصة : $Q = Q_0 = \text{const}$.
 (٢) معطى توزيع درجة الحرارة الابتدائى $u(x, 0) = \varphi(x)$ وكحالة خاصة :

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_0 & 0 < x < l \\ 0 & \text{خارج } (0, l) \end{cases}$$

(٣) وزعت مصادر حرارية بالكثافة $f(x, t)$ على كل للفضيب ودرجة الحرارة الابتدائية تساوى الصفر .
 درس كحالة خاصة حالة $f = q_0 = \text{const}$ (مصادر مستقرة) .

٤- فضيب نصف لانهاى ذو سطح جانبى معزول حراريا سخن بانتظام حتى درجة الحرارة

$$u(x, 0) = u_0 = \text{const } (x > 0),$$

ويتمتع بطرف الفضيب منذ اللحظة $t = 0$ عند درجة حرارة تساوى الصفر .

$$u(0, t) = 0 \quad (t > 0),$$

عين درجة حرارة الفضيب $u(x, t)$. وبلاستعانة بتداول تكامل الأخطاء

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

رسم لمنحنيات بالتغير x فى لفترة $0 \leq x \leq l$ للدالة $u(x, t)$ عندما $t = l^2/2a^2$ ، $t = l^2/a^2$ ، $t = l^2/16a^2$.

إرشاد : من الأنسب الاستعانة بالتغيرات بلا أبعاد

$$x' = x/l, \theta = \alpha^2 l / \beta, v = u/u_0$$

٥- يفتح طرف أسطوانة نصف لانهاية في اللحظة الابتدائية $t = 0$ في الجو حيث يكون تركيز غاز ما $u(x, t)$. عين تركيز الغاز في الأسطوانة $u(x, t)$ لقيم $x > 0, t > 0$ إذا كان التركيز الابتدائي $u(x, 0) = 0$. وبلااستعانة بمداول تكامل الأخطاء بين بعد أية فترة زمنية يصل تركيز الغاز في الطبقة التي تبعد بمسافة l عن طرف الأسطوانة إلى ٩٥٪ من التركيز الخارجى . عين قانون حركة جبهة التركيز الثابت .

٦- يصل دفق حرارى $q(t) = q_0(0, t)$ إلى طرف قضيب نصف لانهاى كانت درجة حرارته الابتدائية مساوية للصفر . عين درجة حرارة القضيب $u(x, t)$ إذا كان :

(أ) القضيب معزول حراريا من جوانبه ،

(ب) يحدث تبادل حرارى على السطح الجانبي للقضيب (بقانون نيوتن) مع الوسط المحيط ذى درجة الحرارة الصفرية .

ادرس الحالة الخاصة $q = q_0 = \text{const}$.

٧- يحفظ بطرف قضيب نصف لانهاى عند درجة حرارة ثابتة u_0 ويحدث على السطح الجانبي للقضيب تبادل حرارى مع وسط درجة حرارته ثابتة وتساوى u_1 . ودرجة حرارة القضيب الابتدائية تساوى الصفر . عين $u(x, t)$ درجة حرارة القضيب .

٨- حل المسألتين ٦- (أ) ، ٦- (ب) متبعا أن $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$.

٩- عين درجة الحرارة المستقرة على امتداد قضيب نصف لانهاى ذى سطح جانبي معزول حراريا ، وحل طرله :

(أ) معطاة درجة الحرارة $u(0, t) = A \cos \omega t$ ،

(ب) معطى دفق حرارى $Q(t) = B \sin \omega t$ ،

(ج) يحدث تبادل حرارى وفقا لقانون نيوتن مع وسط تتغير درجة حرارته وفقاً للقانون $u(t) = C \sin \omega t$.

١٠- بالاستعانة بطريقة الانعكاس كرون دالة تأثير المصدر اللحظى التغطى للقضيب المحدود ذى السطح الجانبي المعزول حراريا بالشروط الحدية من النوع الأول والثانى .

١١- قضيب لانهاى يتكون من قضيين متجانسين يتلامسان عند النقطة $x = 0$ ويميزتهما a_1, b_1 و a_2, b_2 على الترتيب . ودرجة الحرارة الابتدائية

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 & , x < 0, \\ T_2 & , x > 0. \end{cases}$$

عين درجة الحرارة $u(x, t)$ في القضيب عندما يكون سطحه الجانبي معزولا حراريا .

ملاحق الباب الثالث

ملحق ١ - موجات درجة الحرارة

تعتبر مسألة انتشار موجات درجة الحرارة في التربة من أول أمثلة تطبيقات النظرية الرياضية للتوصيل الحرارى - التى طورها فورييه - على دراسة ظواهر الطبيعة .

إن درجة الحرارة على سطح الأرض تحمل كما هو معلوم طبيعة دورية ظاهرة سنوية ويومية . نلجأ إلى مسألة انتشار للذبذبات الحرارية الدورية في التربة التى سنعتبرها نصف فراغ متجانس $0 \leq x < \infty$. وهذه المسألة تعتبر مسألة مميزة للمسائل بلا شروط ابتدائية ، وذلك لأنه عند التكرار الكثير لسلوك درجة الحرارة على السطح يكون تأثير درجة الحرارة الابتدائية أقل من تأثير العوامل الأخرى التى نهملها (على سبيل المثال عدم تجانس التربة) . وبذلك نصل إلى المسألة التالية :

عين الحل المحدود لمعادلة التوصيل الحرارى

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x < \infty, \quad -\infty < t) \quad (1)$$

الذى يحقق الشرط

$$u(0, t) = A \cos \omega t. \quad (2)$$

وهذه المسألة درست في الباب الثالث . وحلها يكون على الصورة (انظر الباب الثالث ، بند ٤ ، معادلة (7) :

$$u(x, t) = A e^{-\sqrt{\frac{a^2}{2a^2}} x} \cos\left(\sqrt{\frac{a^2}{2a^2}} x - \omega t\right). \quad (3)$$

وعلى أساس هذا الحل الناتج يمكن إعطاء الصورة المميزة التالية لعملية انتشار موجة درجة الحرارة في التربة . إذا كانت درجة حرارة السطح تتغير دوريا لمدة زمنية طويلة فإنه تحدث في التربة أيضا ذبذبات لدرجة الحرارة بنفس الفترة علما بأن :

١ - سعة الذبذبات تتناقص بقانون أسى مع العمق

$$A(x) = A e^{-\sqrt{\frac{a^2}{2a^2}} x}$$

أى إذا زادت الأعماق تبعاً لمتوالية حساسية فإن السعة تتناقص تبعاً لمتوالية هندسية (قانون فورييه الأول) .

٢- تحدث ذبذبات درجة الحرارة فى الأرض بانزياح للطور . فالزمن δ لتأخير القيم العظمى (الصغرى) لدرجة الحرارة فى التربة عن اللحظات المناظرة على السطح يتناسب مع العمق

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2\omega^2}} x$$

(قانون فورييه الثانى) .

٣- عمق تغلغل الحرارة فى التربة يعتمد على فترة ذبذبات درجة الحرارة على السطح . والتغير النسبى لسعة درجة الحرارة يساوى

$$\frac{A(x)}{A} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} x}$$

وهذه العلاقة توضح أنه كلما صغرت فترة الدورة كلما قل عمق تغلغل درجة الحرارة . ولذبذبات درجة الحرارة بالفترتين (الزمنين الدوريين) T_2 . T_1 يرتبط العمقان x_2 . x_1 اللذان يحدث عندهما تغير نسبى واحد لدرجة الحرارة بالعلاقة التالية :

$$x_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} x_1$$

(قانون فورييه الثالث) . فعلى سبيل المثال ، بمقارنة الذبذبات اليومية بالسنتوية التى لها $T_2 = 365 T_1$ يتضح أن

$$x_2 = \sqrt{365} x_1 = 19.1 x_1$$

أى أن عمق تغلغل الذبذبات السنوية عندما تكون السعة على السطح واحدة فى الحالتين كان سيصبح أكبر من عمق تغلغل الذبذبات اليومية بـ ١٩,١ مرة .
ويمثابة مثال نورد نتائج ملاحظات ذبذبات درجة الحرارة السنوية فى محطة جوش الواقعة على نهر آمور بسيبيريا :

1	2	3	4
11.5	6.8	4.2	2.8

العمق (بالمتر)
السعة (°م)

وهذه المعطيات توضح أن سعة الذبذبات السنوية على عمق ٤ أمتار تناقصت إلى حوالي ١٣,٣٪ من قيمتها على السطح التي تساوى ١٩,٥°. وعلى أساس هذه المعطيات يمكن تعيين معامل توصيل درجة الحرارة للتربة

$$\ln \frac{A(x)}{A} = -\sqrt{\frac{\alpha}{2a^2}} x, \quad \alpha^2 = \frac{\omega x^2}{2 \ln^2 \frac{A(x)}{A}}.$$

ومن هنا نجد أن معامل توصيل درجة الحرارة للتربة يساوى

$$\alpha^2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$$

وزمن تأخير درجة الحرارة العظمى على عمق ٤ أمتار يصل إلى أربعة أشهر.

غير أنه يجب الأخذ في الاعتبار أن النظرية المشروحة هنا تتعلق بانتشار الحرارة في التربة الجافة أو الصخر. فوجود الرطوبة يعقد من الظواهر الحرارية في التربة، ويحدث عند التجمد ابتعاث حراري كامن لا يؤخذ في الاعتبار في هذه النظرية.

إن معامل توصيل درجة الحرارة يعتبر أحد مميزات الجسم الهامة للدراسة لخواصه الفيزيائية وكذلك للحسابات التكنيكية المختلفة. وتؤسس إحدى الطرق العملية لتعيين معامل توصيل درجة الحرارة على دراسة انتشار موجات درجة الحرارة في القضبان.

نفرض أنه يحتفظ بأحد طرفي قضيب طويل بشكل كاف عند درجة حرارة دورية $u(t)$ بالتعبير عن هذه الدالة بمسلسلة فورييه

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left[\frac{2\pi n}{T} (t - \delta_n^0) \right], \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \delta_n^0 = \frac{T}{2\pi n} \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}, \end{aligned}$$

حيث T الزمن الدوري (الفترة)، وبأخذ موجات درجة حرارة تناظر كل حد، نجد أن درجة الحرارة $u(x, t)$ لأي x تكون دالة دورية في الزمن وتكون توافقياً. رقم n مساوية

$$u_n(x, t) = a_n(x) \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n(x) \sin \frac{2\pi n}{T} t =$$

$$= A_n e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{T\alpha^2}} x} \cos \left[\sqrt{\frac{\pi n}{T\alpha^2}} x - \frac{2\pi n}{T} t + \frac{2\pi n}{T} \theta_n^0 \right]$$

أو

$$\frac{\sqrt{a_n^2(x_1) + b_n^2(x_1)}}{\sqrt{a_n^2(x_2) + b_n^2(x_2)}} = e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{T\alpha^2}} (x_1 - x_2)}$$

وهذه العلاقة توضح أنه إذا أجرينا قياس درجة الحرارة في نقطتين ما x_1, x_2 خلال فترة زمن دورى كاملة فإننا بتعييننا للمعاملات $a_n(x_1), b_n(x_1), a_n(x_2), b_n(x_2)$ بواسطة طرق التحليل التوافقي يمكن أن نعين معامل توصيل درجة الحرارة للقضيب α .

ويمكن إحداث الذبذبات الدورية لدرجة الحرارة في القضيب بالطريقة التالية مثلاً : نضع أحد طرفي القضيب في فرن كهربائي وبعد فترات زمنية متساوية نقوم بقطع وتوصيل التيار . ونتيجة لعملية التسخين الدورية هذه يحدث في القضيب بعد بعض الوقت ذبذبات دورية لدرجة الحرارة . وبقياس درجتي الحرارة $u(x_1, t), u(x_2, t)$ بواسطة جهاز القياس بالمزدوجة الحرارية (thermocouple) في أية نقطتين x_1, x_2 خلال فترة زمن دورى كاملة لتغير النظام الحدى ثم معالجة u_1, u_2 على النحو للوضح أعلاه يمكن تعيين α - معامل توصيل درجة الحرارة للمادة المصنوع منها القضيب . ومن الطبيعي أنه لقابلية النظرية الواردة أعلاه للتطبيق ينبغي أن يكون السطح الجانبي للقضيب معزولاً حرارياً وكذلك ينبغي مراقبة درجة حرارة الطرف الآخر للقضيب لكي يمكن الاستعانة بنظرية موجات درجة الحرارة في القضيب نصف اللانهائي .

ولإمكانية الاستعانة بنظرية موجات درجة الحرارة في القضيب نصف اللانهائي يجب التأكد من أن درجة الحرارة عند الطرف الحر للقضيب ثابتة . ويتم مراقبة ذلك بواسطة جهاز قياس إضافي .

ملحق ٢ - تأثير الانقسام الإشعاعي على درجة حرارة القشرة الأرضية

ليس لدينا للحكم على الحالة الحرارية الداخلية للأرض إلا معلومات قليلة حصلنا عليها من الملاحظات على سطح الأرض . إن المعلومات الأساسية عن

المجال الحرارى للقشرة الأرضية تنحصر فيها إلى . إن الذبذبات اليومية والسنوية في درجة الحرارة تحدث في طبقة رقيقة نسبيا من السطح (حوالى ١٠ - ٢٠ مترا للذبذبات السنوية) . وأسفل هذه الطبقة تتغير درجة الحرارة مع تغير الزمن ببطء شديد .

وتبين الملاحظات التي نحصل عليها في المناجم والأنفاق والمتعلقة بالطبقة العليا من القشرة الأرضية التي عمقها لا يزيد عن ٢ إلى ٣ كيلومترات ، أن درجة الحرارة ترتفع كلما تعمقنا داخل الأرض بمعدل ٣ درجات مئوية كل ١٠٠ متر .

وتعود المحاولات الأولى للتفسير النظرى لتدرج درجة الحرارة الأرضية الملاحظ إلى نهاية القرن الماضى ولكنها اصطدمت بمصاعب لم يمكن التغلب عليها في ذلك الوقت . وقد انطلقت هذه المحاولات من تصور تبريد الأرض التي كانت محترقة ومنصهرة في الماضى . ودرجة الحرارة الابتدائية التي تميز عملية التبريد هذه هي حوالى $T_0 = 1200^\circ\text{C}$ (درجة حرارة انصهار الصخور الجبلية) ودرجة الحرارة السطحية هي حوالى 0°C ولا يمكن أن تنحرف انحرافا كبيرا عن هذه القيمة (أكثر من 100°) خلال كل فترة وجود الأرض . وتؤدى النظرية الكمية المبسطة لعملية تبريد الأرض إلى حل معادلة التوصيل الحرارى

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

في نصف الفراغ $0 < z < \infty$ بالشروط الابتدائية والحدية التالية :

$$u(z, 0) = T_0, \quad u(0, t) = 0.$$

وقد درسنا حل هذه المسألة في بند ٣ من هذا الباب ويعطى بالعلاقة

$$u(z, t) = T_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{at}}} e^{-a^2} da.$$

وتدرج (gradient) هذه الدالة عند $z = 0$ يساوى

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{z^2}{4a^2 t}} \Big|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi} \sqrt{a^2 t}}.$$

وبالتعويض هنا بالقيم المعلومة لتدرج درجة الحرارة الأرضية $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \gamma = 3 \cdot 10^{-4} \text{ grad/cm}$ و $T_0 = 1200^\circ\text{C}$ وكذلك بقيمة

$\alpha^2 = 0.006 \text{ cm}^2/\text{s}$ المناظرة للقيمة المتوسطة للمعينة بالتجربة العملية لمعامل توصيل درجة الحرارة للجرانيت والبازلت نحصل لمدة عملية التبريد على القيمة :

$$t = 0.85 \cdot 10^{15} \text{ s} = 27\,000\,000 \text{ years.}$$

ولكن هذا التصور عن عمر الأرض لا يتفق بأى شكل مع المعطيات الجيولوجية . والطابع التقريبي لهذه النظرية (إهمال انحناء الأرض وعدم ثبات معامل درجة الحرارة وتقريب قيمة T_0) لا يمكن بالطبع أن يؤدي إلى هذا التغير الكبير في رتبة القيمة الناتجة لعمر الأرض وهو الذى يقدر وفقا للمعلومات الحديثة بحوالى $2 \cdot 10^9$ سنة تقريبا .

إن الشكل الفيزيائى لنظام درجة حرارة الأرض قد خضع إلى إعادة نظر جوهرية بعد اكتشاف الانقسام الإشعاعى . إن العناصر المشعة المنتشرة فى القشرة الأرضية يحدث عن انقسامها (انحلالها) تسخين لهذه القشرة الأرضية ، ولذا فإن معادلة التوصيل الحرارى يجب أن تكون على الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \quad \left(f = \frac{A}{cp}\right).$$

حيث A هى الكثافة الحجمية للمصادر الحرارية . وعلى أساس القياسات المتعددة لإشعاعية الصخور وقدرتها على البعث الحرارى تؤخذ القيمة

$$A = 1.3 \cdot 10^{-12} \text{ cal/cm}^3\text{s.}$$

وهذه القيمة تأخذ فى الاعتبار الحرارة التى يبعثها اليورانيوم والثوريوم والبوتاسيوم ومنتجات انقسامها .

نفرض أن كثافة المصادر المشعة داخل الكرة الأرضية ثابتة وتساوى قيمة A . المعينة للطبقات العليا من القشرة الأرضية . وفى هذه الحالة فإن كمية الحرارة المنبعثة فى كل الكرة الأرضية خلال وحدة الزمن تكون مساوية :

$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 A.$$

نفرض فرضا ثانيا وهو أن الأرض لا تسخن بجمرة الإشعاع . وفى هذه الحالة فإن دفق الحرارة خلال وحدة مساحة السطح

$$q = k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \geq \frac{Q}{4\pi R^2},$$

حيث $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$ ، k هما معامل التوصيل الحرارى وتدرج درجة الحرارة الأرضية عند سطح الأرض . ومن هنا نعين للقيمة $\frac{\partial u}{\partial z}$ عندما $z=0$ القيمة

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} \geq \frac{AR}{3k} \cong 6.3 \cdot 10^{-2} \text{ grad/cm}$$

حيث $R = 6.3 \cdot 10^3 \text{ km}$ هو نصف قطر الأرض ، $k = 0.004$ القيمة المتوسطة لمعامل التوصيل الحرارى للصخور المترتبة .

وبذلك فتدرج درجة الحرارة الأرضية المحسوب بفرض أن توزيع العناصر المشعة فى الأرض ثابت وأن الأرض لا تسخن نتيجة الانقسام الإشعاعى يزيد برتبتين القيمة الملاحظة للمعامل

$$\gamma = 3 \cdot 10^{-4} \text{ grad/cm} .$$

وبرفض فرضية ثبات توزيع العناصر المشعة نفرض أن العناصر المشعة موزعة فى طبقة عمقها H على سطح الأرض . وإهمال انحناء الأرض نحصل لتعيين درجة الحرارة المستقرة على المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \begin{cases} -\frac{A}{k} & , \quad 0 \leq z \leq H, \\ 0 & , \quad z > H \end{cases}$$

بالشروط

$$u(0) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z \rightarrow \infty} = 0.$$

ومن الواضح أن حل المسألة المطروحة هو

$$u(z) = \begin{cases} \frac{A}{k} \left(Hz - \frac{z^2}{2} \right), & 0 \leq z \leq H, \\ \frac{A}{k} \frac{H^2}{2}, & z \geq H, \end{cases}$$

وذلك لأن هذه الدالة متصلة هى ومشتقتها الأولى عند $z = H$ وتحقق شروط المسألة .

وبتعيين قيمة تدرج هذه الدالة عند $z = 0$ المساوى

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{AH}{k} .$$

ومقارنتها بالقيمة الملاحظة $\gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ grad/cm نجد أن

$$H = \frac{\gamma k}{A} \approx 10^9 \text{ cm} = 10 \text{ km.}$$

نقدر تأثير فرضية استقرار درجة الحرارة على مقدار تدرج درجة الحرارة الأرضية. ندرس لهذا الغرض حل معادلة التوصيل الحرارى

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f,$$

$$f = \begin{cases} \frac{A}{c\rho}, & 0 \leq z \leq H, \\ 0, & z > H \end{cases}$$

بالشروط الابتدائية الصفرية والحدية

$$w(z, 0) = 0,$$

$$w(0, t) = 0.$$

وحل هذه المسألة يعبر عنه كما رأينا فى بند ٣ بالتكامل

$$w(z, t) = \int_0^\infty \int_0^t G(z, \xi; t - \tau) f(\xi) d\tau d\xi,$$

حيث G دالة المصدر للمستقيم نصف اللانهائى وتساوى

$$G(z, \xi; t - \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t - \tau)}} \left\{ e^{-\frac{(z - \xi)^2}{4a^2(t - \tau)}} - e^{-\frac{(z + \xi)^2}{4a^2(t - \tau)}} \right\}.$$

نحسب قيمة التدرج عند $z = 0$ بالأخذ فى الاعتبار قيمة الدالة f :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0} &= \frac{A}{c\rho 2\sqrt{\pi}} \int_0^H \int_0^t \frac{\xi}{\sqrt{[a^2(t - \tau)]^3}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t - \tau)}} d\xi d\tau = \\ &= \frac{A}{c\rho \sqrt{\pi}} \int_0^H \frac{1}{\sqrt{a^2(t - \tau)}} \int_0^{\frac{H^2}{4a^2(t - \tau)}} e^{-u} du d\tau = \\ &= \frac{A}{c\rho \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2\theta}} \left[1 - e^{-\frac{H^2}{4a^2\theta}} \right] d\theta, \quad \theta = t - \tau. \end{aligned}$$

وبذلك فإن

$$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{A}{c\rho \sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2\sqrt{t}}{a} - \frac{H}{a^2} \int_0^\infty e^{-\sigma^2} \frac{d\sigma}{\sigma^2} \right\}$$

حيث

$$\sigma = \frac{H}{2\sqrt{a^2 t}}, \quad \sigma_0 = \frac{H}{2\sqrt{a^2 t}}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{a^2}{H} \frac{d\theta}{dt}.$$

نحسب التكامل

$$\int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2} \frac{d\sigma}{\sigma^2} = -\frac{e^{-\sigma^2}}{\sigma} \Big|_{\sigma_0}^{\infty} - 2 \int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \frac{e^{-\sigma_0^2}}{\sigma_0} - 2 \int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma,$$

ومن هنا نجد أن :

$$\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{A}{c\rho a^2} \left\{ \frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left[1 - e^{-\frac{H^2}{4a^2 t}} \right] + H \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{H}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma \right\}. \quad (1)$$

ونشير إلى أن

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{A}{k} H,$$

وذلك لأن $c\rho a^2 = k$ ونهاية الحد الأول داخل القوسين تساوى الصفر ونهاية الحد الثاني تساوى H .

نحسب انحراف $\frac{\partial w}{\partial z}$ عن قيمته النهائية عند

$$t = 2 \cdot 10^9 \text{ years} = 6 \cdot 10^{16} \text{ s.}$$

قيمة σ_0 صغيرة :

$$\sigma_0 = \frac{H}{2\sqrt{a^2 t}} = \frac{10^4}{2\sqrt{6 \cdot 10^{-9} \cdot 6 \cdot 10^{16}}} = \frac{1}{2 \cdot 19} \cong 0,025.$$

وبفك الدوال الداخلة في العلاقة (1) في متسلسلات نحصل على :

$$\frac{A}{k} H - \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{A}{k} H \left\{ \frac{-1}{\sqrt{\pi} \sigma_0} [\sigma_0^2 + \dots] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sigma_0 \right\} \cong \frac{A}{k} H \cdot 0,014,$$

أى أن $\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0}$ يختلف عن قيمته الابتدائية بمقدار ١,٤ %.

وليس من العسير حساب الدالة $w(z, t)$ للقيم $z > 0$ والتأكد من أنه لأى $z \geq H$ لا تصل $w(z, t)$ بعد إلى قيمتها النهائية عند t المساوى لعمر الأرض (رغم أن التدرج عن السطح يساوى عملياً كما رأينا قيمته النهائية).

والتحليلات الواردة تحمل بالطبع طابعاً تقديرياً فقط . غير أنه بالأخذ في الاعتبار الاستقرار الكبير لسرعة الانقسام الإشعاعي التي لا تتغير تحت تأثير درجات الحرارة والضغط المتاحة يجب أن نصل إلى نتيجة تنحصر في أن تركيز العناصر المشعة يجب أن يتناقص بسرعة مع ازدياد العمق إذا ما بنينا تحليلاتنا على أساس القيمة A للطبقات العليا من القشرة الأرضية ، الناتجة من القياسات المتعددة . ولا يوجد حتى الآن تفسير فيزيائي يكفل توضيح قانون تناقص تركيز العناصر المشعة بازدياد العمق .

ملحق ٣ - طريقة التشابه في نظرية التوصيل الحرارى

إن طريقة التشابه تكون مفيدة للغاية لحل عديد من مسائل التوصيل الحرارى . وبمثابة أمثلة ندرس مسألتين :

١ - دالة المصدر للمستقيم اللانهائى . إن معادلة التوصيل الحرارى ، كما يسهل التحقق من ذلك ، تظل دون تغير عند تحول المتغيرات

$$x' = kx, \quad t' = k^2 t, \quad (1)$$

أى أنه إذا تغير مقياس الطول بمقدار k مرة فإن مقياس الزمن يجب أن يتغير بمقدار k^2 مرة .

سنبحث أولاً عن حل معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (2)$$

بالشرط الابتدائى

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & , \quad x > 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases} \quad (3)$$

وعند التغير المذكور فى المقاييس يظل الشرط الابتدائى (3) دون تغير ، ولذا فللدالة $u(x, t)$ يجب أن تتحقق التساوية

$$u(x, t) = u(kx, k^2 t) \quad (4)$$

لأية قيم x, t, k .

بفرض أن

$$k = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad (5)$$

نحصل على

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{4}\right) = u_0 f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \quad (6)$$

وبذلك تعتمد u فقط على المتغير

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}. \quad (7)$$

وبحساب مشتقات u من العلاقة (6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_0 \frac{d^2 f}{dz^2} \cdot \frac{1}{4t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x \cdot u_0}{4t^{3/2}} \frac{df}{dz} = -u_0 \cdot \frac{z}{2t} \frac{df}{dz},$$

وبالتعويض في معادلة التوصيل الحرارى (2) بهذه القيم للمشتقات واختصار $u_0/4t$ نحصل على :

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = -2z \frac{df}{dz} \quad (8)$$

بالشروط الإضافية

$$f(-\infty) = 0, \quad f(\infty) = 1, \quad (9)$$

المناظرة للشروط الابتدائي للدالة u .

بتكامل المعادلة (8) سنحصل على :

$$z^2 \frac{f''}{f'} = -2z, \quad f' = C e^{-\frac{z^2}{2}},$$

$$f = C \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = C_1 \int_{-\infty}^{\frac{z}{\sqrt{2}}} e^{-\xi^2} d\xi,$$

وقد اخترنا النهاية السفلى هنا بحيث يتحقق الشرط الأول من (9). ولكى يتحقق الشرط الثانى من (9) نجب أن نضع

$$C_1 = 1/\sqrt{\pi}.$$

وبذلك فإن

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{u_0}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right], \quad (10)$$

حيث

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

(تكمال الأخطاء). وإذا كان الشرط الابتدائي على الصورة :

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & x > \bar{x}, \\ 0, & x < \bar{x}, \end{cases} \quad (11)$$

فإن

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right]. \quad (12)$$

وننتقل الآن إلى حل المسألة للمساعدة الثانية حيث تعطى القيم الابتدائية في الصورة :

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x_2 < x, \\ u_0, & x_1 < x < x_2, \\ 0, & x < x_1. \end{cases} \quad (13)$$

وفي هذه الحالة فإن

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\Phi\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2 t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right].$$

ودرجة الحرارة الابتدائية u_0 تناظر كمية الحرارة :

$$Q = c\rho(x_2 - x_1) u_0.$$

وإذا كان

$$Q = c\rho,$$

فإن

$$u(x, t) = -\frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2 t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right]. \quad (14)$$

ودالة تأثير المصدر المركّز في النقطة هي عبارة عن نهاية الدالة $u(x, t)$ عندما

$$x_2 - x_1 \rightarrow 0$$

والانتقال إلى النهاية في العلاقة (14) يعطى :

$$u(x, t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{2} \Phi \left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{a^2 t}} \right) \right]_{\xi=x_1} \quad (15)$$

وذلك لأنه في الطرف الأيمن للعلاقة (14) يوجد فرق نهايته عبارة عن المشتقة في (15) .

وبإجراء التفاضل نجد أن :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4a^2 t}}, \quad (16)$$

أى أن $u(x, t) = G(x, x_1, t)$ وهى دالة المصدر اللحظى النقطى .

٢- المسائل الحدية للمعادلة شبه الخطية للتوصيل الحرارى . ندرس المعادلة شبه الخطية للتوصيل الحرارى

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (17)$$

بمعامل التوصيل الحرارى المعتمد على درجة الحرارة .

نعين حل هذه المعادلة الذى يحقق الشرط الحدى والشرط الابتدائى التاليين :

$$u(0, t) = u_1, \quad u(x, 0) = u_2. \quad (18)$$

وفى هذه الحالة فإن التحويل (1) أيضا لا يغير المعادلة (17) ولا يغير الشروط الإضافية (18) . ومن هنا يتبع أن

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = f(z) \quad \left(z = \frac{x}{2\sqrt{t}}\right), \quad (19)$$

وبالاستعانة بهذه الصيغة نحصل للدالة f على :

$$\frac{d}{dz} \left[k(f) \frac{df}{dz} \right] = -2c\rho z \frac{df}{dz} \quad (20)$$

بالشروط الإضافية

$$f(0) = u_1, \quad f(\infty) = u_2. \quad (21)$$

والدالة f في تلك الحالات التي لا يمكن فيها تعيينها تحليليا يمكن تعيينها بواسطة عملية التكامل العددي.

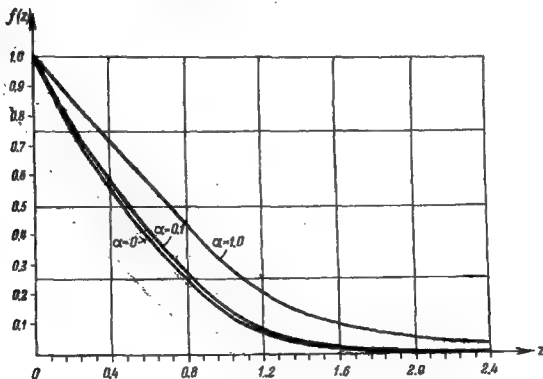
والمعادلة (20) يفترضات عامة للغاية بخصوص الدالتين cp , k لها حل وحيد يحقق الشروط (21). . . غير أننا لن نتوقف عند إثبات هذه الحقيقة .

ندرس كمثال المعادلة (17) حيث $k(u) = k_0 + k_1 u$ دالة خطية و cp مقدار ثابت . بتغيير مقياس الزمن وتدرج قيم u نحصل للدالة المحولة على المعادلة $\frac{\partial}{\partial x} [(1 + \alpha u) \frac{\partial u}{\partial x}] = \frac{\partial u}{\partial t}$ بالشرطين الابتدائي والحددي $u(x, 0) = 0$ و $u(0, t) = 1$ بفرضي

$$u(x, t) = f(z), \quad z = \frac{x}{2\sqrt{t}}.$$

نحصل للدالة f على المعادلة

$$\frac{d}{dz} [(1 + \alpha f) \frac{df}{dz}] = -2z \frac{df}{dz}, \quad f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0. \quad (22)$$



شكل ٤٢

وإذا كان معامل التوصيل الحراري $k(u)$ دالة قوى في درجة الحرارة $k(u) = k_0 u^\sigma$ حيث $k_0 = \text{const} > 0$, $\sigma > 0$ ويدل من (18) معطاة الشروط

$u(0, t) = 0$ ، $n > 0$ ، $u(x, 0) = 0$ ، $cp = 1$ يكون لها
حل على الصورة $u(x, t) = t^{m/2} f(z)$ حيث $z = x/ct^m$ ، $m = (1 + n\sigma)/2$ ، $c = \text{const} > 0$
وكحالة خاصة عندما $n = \sigma$ نحصل على حل على
نمط «موجة درجة الحرارة» المنتشرة بسرعة محدودة c :
عندما $x \geq ct$ $u(x, t) = 0$ ، عندما $x \leq ct$ $u(x, t) = u_0 \left(1 - \frac{x}{ct}\right)^{1/n}$
(انظر الباب الرابع من الكتاب الثاني ، شكل ١٦) . وفي شكل ٤٧ ترد نتائج
عملية التكامل العددي للمعادلة (22) لقيم σ المختلفة .

ملحق ٤ - مسألة على الانتقال الطوري

قد يحدث عند تغير درجة حرارة الجسم تغير في حالته الفيزيائية : كحالة
خاصة ، عند مرور درجة الحرارة منطقة الانصهار أى الانتقال من الطور السائل
إلى الصلب (أو العكس) . وعلى سطح الانتقال الطوري تظل درجة الحرارة طول
الوقت ثابتة . وعند حركة سطح الانتقال الطوري يحدث انبعاث للحرارة الكامنة
للتجمد (أو الانصهار) . نصيغ تلك الشروط الإضافية التي يجب أن تتحقق على
سطح التجمد (التصلب) .

ندرس المسألة المستوية عندما يكون السطح الفاصل عبارة عن المستوى
 $x = \xi(t)$. وخلال الفترة الزمنية t ، $t + \Delta t$ تتحرك الحدود $x = \xi$ من النقطة
 $\xi = x_1$ إلى النقطة $\xi = x_2 = x_1 + \Delta \xi$. وعند ذلك تتجمد الكتلة $\rho \Delta \xi$ (أو
تنصهر إذا كان $\Delta \xi < 0$) وتنبعث كمية حرارة متناظرة هي $\lambda \rho \Delta \xi$.

ولتحقق التوازن الحرارى يجب أن تكون كمية الحرارة هذه مساوية للفرق بين
كميتي الحرارة المارتين خلال الحدود $x = x_1$ ، $x = x_2$ أى يجب أن يتحقق
الشروط

$$\left[k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right]_{x_1} - \left[k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right]_{x_2} \Delta t = \lambda \rho \Delta \xi$$

حيث k_1 ، k_2 معامل التوصيل الحرارى للطورين الأول والثاني و λ هى الحرارة
الكامنة للانصهار .

وبالانتقال إلى النهاية عند $\Delta t \rightarrow 0$ نحصل على الشرط الإزدياقى على الحدود الفاصلة على الصورة التالية :

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = \lambda \rho \frac{d\xi}{dt}$$

ويحقق هذا الشرط لعملية التجمد (عندما $\frac{d\xi}{dt} > 0$, $\Delta\xi > 0$) ولعملية الانصهار (عندما $\frac{d\xi}{dt} < 0$, $\Delta\xi < 0$) على السواء. ويتحدد اتجاه العملية بإشارة الطرف الأيسر.

ندرس عملية تجمد الماء التى تكون فيها درجة حرارة الانتقال الطورى مساوية للصفر. سندرس كتلة ماء $x \geq 0$ محدودة من ناحية واحدة بالمستوى $x = 0$. وفى اللحظة الابتدائية $t = 0$ تكون للماء درجة حرارة ثابتة $c > 0$. وإذا احتفظ على السطح $x = 0$ طول الوقت بدرجة حرارة ثابتة $c_1 < 0$ فإن حدود التجمد $x = \xi$ ستعتمد مع مرور الزمن داخل السائل.

ومسألة توزيع درجة الحرارة عند وجود الانتقال الطورى وسرعة حركة الحدود الفاصلة بين الطورين (على سبيل المثال داخل الماء أثناء تجمده) تقود إلى حل المعادلتين

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & 0 < x < \xi, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} & \xi < x < \infty \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

بالشروط الإضافية

$$\left. \begin{aligned} x=0 & \text{ عندما } u_1 = c_1 \\ t=0 & \text{ عندما } u_2 = c \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

والشروط على حدود التجمد

$$x = \xi \text{ عندما } u_1 = u_2 = 0 \quad (3)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = \lambda \rho \frac{d\xi}{dt} \quad (4)$$

حيث k_1, a_1^2, k_2, a_2^2 معاملات التوصيل الحرارى وتوصيل درجة الحرارة للطورين الصلب والسائل على التوالى. وكثيراً ما تسمى المسألة (4) — (1) بمسألة ستيفان، مسألة الانتقال الطورى أو مسألة التجمد.

نبحث عن حل المسألة في الصورة :

$$u_1 = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{x}{2a_1 \sqrt{t}}\right), \quad u_2 = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{x}{2a_2 \sqrt{t}}\right).$$

حيث B_2, A_2, B_1, A_1 معاملات غير محددة حتى الآن ، و Φ تكامل الأخطاء

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi.$$

ويتحقق الشروط (3) ، (2) نحصل على

$$A_1 = c_1, \quad A_2 + B_2 = c$$

من الشرط (2) ، ونحصل على

$$A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_1 \sqrt{t}}\right) = 0,$$

$$A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_2 \sqrt{t}}\right) = 0$$

من الشرط (3) . والشرطان الأخيران يجب أن يتحققا لأي t . وهذا ممكن فقط عند تحقق العلاقة

$$\xi = \alpha \sqrt{t}, \quad (5)$$

حيث α ثابت ما . والعلاقة (5) تحدد قانون حركة حدود التجمد .
وللتوابت B_2, A_2, B_1, A_1 و α نتج الصيغ :

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= c_1, & B_1 &= -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}, \\ A_2 &= -\frac{c\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}, & B_2 &= \frac{c}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ولتعيين الثابت α نستعين بالعلاقة (4)

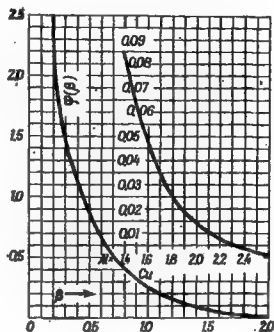
$$\frac{k_1 c_1 \sigma \frac{\sigma^2}{4a_1^2}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} + \frac{k_2 c \sigma \frac{\sigma^2}{4a_2^2}}{a_2 \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right]} = -\lambda \rho \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (7)$$

ويعطى حل هذه المعادلة التفاضلية قيمة α . ووجود ولو حل واحد لهذه المعادلة عندما $c > 0$ ، $c_1 < 0$ ، إنما ينتج من أنه عند تغير α من الصفر إلى ∞ يتغير الطرف الأيسر للمعادلة من $-\infty$ إلى $+\infty$. والطرف الأيمن يتغير من الصفر إلى

∞ . وفي تلك الحالة عندما تكون c مساوية لدرجة حرارة الانصهار ($c=0$) فإن الصيغتين (6) ، (7) لتعيين العوامل تأخذان صورتين أبسط :

$$A_2 = B_2 = 0, \\ A_1 = c_1, \quad B_1 = -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} \quad (6')$$

$$\frac{\frac{c_1}{4a_1^2}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} = -\lambda \rho \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (7')$$



شكل ٤٣

وبوضع $\alpha/2a_1 = \beta$ يمكننا كتابة المعادلة (7') في الصورة :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\beta^2}}{\Phi(\beta)} = -D\beta,$$

حيث يتحدد الثابت D بالصيغة

$$D = \frac{\lambda \rho a_1^2}{k_1 c_1} < 0.$$

وبالاستعانة بمنحنى الدالة $\Phi(\beta) = \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{\pi} \Phi(\beta)}$ الوارد في شكل ٤٣ يمكن بسهولة تعيين قيمة α بيانياً .

إن حل مسألة التجمد (مسألة ستيفان) يمكن الحصول عليه أيضاً بواسطة طريقة التشابه الواردة في الملحق ٣ بهذا الباب. فمسألة التجمد تعتبر بمعنى معين حالة نهائية للمسائل الحدية اللاخطية التي درست في الملحق ٣ . بالفعل فمعاملات التوصيل الحراري والسعة الحرارية في مسألة التجمد تعتبر دوال متقطعة الثبات

• انظر التمثيل التقاربي للدالة $1 - \Phi(x)$ عندما $x \rightarrow \infty$ في الكتاب الثاني ، الباب الخامس ، قسم ٤ .

وعلاوة على ذلك فعند $u=0$ تكون للسعة الحرارية قيمة كبيرة كبرا لانهاثيا .
وهذه الحالة يمكن الحصول عليها كحالة نهائية عندما $s \rightarrow 0$ وعندما لا تنبعث
الحرارة الكامنة انبعاثا لحظيا ولكن تنبعث في خلال فترة ما $+e, -e$ علما بأنه
ينبغي أن يتحقق الشرط

$$\int_{-e}^{+e} c(u) du = \lambda.$$

إلا أن هذه المسألة يمكن حلها مباشرة أيضا بالاستعانة بطريقة التشابه . وليس من
الصعب التحقق من أن كل شروط المسألة ستظل دون تغير إذا ازداد مقياس الطول
 k مرة وازداد مقياس الزمن k^2 مرة . وهذا يعنى أن حل المسألة يعتمد على المتغير
 $\frac{x}{\sqrt{t}}$ أى أن

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

ومن هنا كحالة خاصة ينتج أن حركة الايزوثرم الصغرى توصف بالمعادلة
 $\xi = \alpha \sqrt{t}$ حيث α قيمة المتغير التى عندها تكون $f(\alpha) = 0$. ولتعيين الدالة f
لدينا الشروط التالية :

$$a_1^2 \frac{d^2 f_1}{dz^2} = -2z \frac{df_1}{dz} \quad , \quad 0 < z < \alpha,$$

$$a_2^2 \frac{d^2 f_2}{dz^2} = -2z \frac{df_2}{dz} \quad , \quad \alpha < z < \infty;$$

$$f_1(0) = c_1; \quad f_2(\infty) = c; \quad f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0;$$

$$k_1 f_1'(\alpha) - k_2 f_2'(\alpha) = \lambda \rho \frac{\alpha}{2}.$$

ولذا فالدالة $f(z)$ تكون على الصورة

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{z}{2a_1}\right), & 0 < z < \alpha, \\ f_2(z) = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{z}{2a_2}\right), & \alpha < z < \infty. \end{cases}$$

ولتعيين الثوابت A_1, B_1, A_2, B_2 يجب أن نستعين بالشروط (3) , (2) التى
تنتج منها العلاقة (6) . ولتعيين α ينتج الشرط (7) . وبذلك فالجزء التحليلي من
الحل واحد في الطريقتين .

وتوضح التصورات الواردة أن مسألة التجمد يمكن حلها أيضا في تلك الحالات عندما تنبعث الحرارة الكامنة خلال فترة معينة من فترات تغير درجة الحرارة وليس فقط عند درجة حرارة معينة مثبتة. وينفس الطريقة يمكن حل المسألة عندما توجد عدة درجات حرارة حرجية وليس درجة حرارة حرجية واحدة ، وهو ما تقابله في التحولات الطورية في عملية الانتقال من تركيب بلورى معين الى آخر ، على سبيل المثال عند إعادة تبلور الصلب. وأكثر طرق الحل العددي فعالية في حل مسائل الانتقال الطورى هي طريقة الفروق المحدودة التى يمكن تطبيقها في حالة متغيرين أو ثلاثة متغيرات فراغية عند وجود عدة انتقالات طورية (انظر الباب الرابع من الكتاب الثانى ، بند ٤) .

ملحق ٥ - معادلة اينشتين - كولوموجوروف

تتحرك الجسيمات الميكروسكوبية الموجودة في الوسط في الحالة الحرة المعلقة حركة عشوائية تسمى بالحركة البراونية . نرمز لاحتمال وجود الجسم الخارج من عند النقطة M_0 في اللحظة t_0 في الجوار الصغير ΔV للنقطة M في اللحظة t بالدالة

$$W(M, t; M_0, t_0) \cdot \Delta V. \quad (1)$$

ويفهم الاحتمال هنا بمعنى أنه إذا كان يخرج خلال فترة زمنية صغيرة $t_0 + \Delta t$ من النقطة M_0 كمية كبيرة N من الجسيمات (علما بأن التأثير المتبادل فيما بينها ضئيل لدرجة يمكن فيها إهماله) فإن تركيز هذه الجسيمات عندما $\Delta t \rightarrow 0$ عند النقطة M في اللحظة t يكون مساويا $W(M, t; M_0, t_0)$ وذلك إذا اعتبرنا وحدة الكتلة هي كل كتلة الجسيمات الخارجة من النقطة M_0 .

وتقابل مثل هذه الظواهر عند انتشار الغازات الناتج في وسط ما (وسط هوائى مثلا) . والدالة $W(M, t; M_0, t_0)$ تمثل دالة المصدر النقطى المناظر لوحدة الكتلة

ومن الواضح أن

$$\int W(M, t; M_0, t_0) dV_M = 1 \quad (t > t_0) \quad (2)$$

وأنه إذا كان التركيز الابتدائى للجسيمات في لحظة زمنية ما t_0 مساويا $\varphi(M)$ فإن التركيز $u(M, t)$ لهذه الجسيمات في اللحظة $t > t_0$ سيكون مساويا

$$u(M, t) = \int W(M, t; P, t_0) \varphi(P) dV_P, \quad (3)$$

حيث يؤخذ التكامل على كل الفراغ.

ومن المساواة الأخيرة نتج المعادلة

$$W(M, t; M_0, t_0) = \int W(M, t; P, \theta) W(P, \theta; M_0, t_0) dV_P \quad (4)$$

$$(t_0 < \theta < t),$$

التي تتحقق لأية قيمة $t_0 < \theta < t$. وهذه المعادلة الأخيرة تسمى معادلة اينشتين - كولموجوروف.

نوضح أنه عند شروط معينة مفروضة على الدالة $W(M, t; M_0, t_0)$ يحقق حل معادلة اينشتين - كولموجوروف معادلة ما تفاضلية جزئية من النمط المكافئ. ندرس تلك الحالة عندما يتحدد وضع النقطة M بإحداثي واحد x ، ونفرض أن الدالة $W(x, t; x_0, t_0)$ تحقق الشروط التالية:

1°

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{x - \xi}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (x - \xi) W(x, t + \tau; \xi, t) dx = A(\xi, t). \quad (5)$$

وإذا انتقل الجسم خلال الزمن τ من الوضع ξ إلى الوضع x فإن $\frac{x - \xi}{\tau}$ تعتبر السرعة المتوسطة للجسم. وبذلك يعنى الشرط الأول مطلب وجود سرعة محدودة للحركة المنتظمة للجسم.

2°

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(x - \xi)^2}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (x - \xi)^2 W(x, t + \tau; \xi, t) dx = 2B(\xi, t). \quad (6)$$

والمقدار $(x - \xi)^2$ لا يعتمد على اتجاه ازاحة النقطة x بالنسبة إلى النقطة ξ . والقيمة المتوسطة لمربع الانحراف خلال الزمن τ :

$$\overline{(x - \xi)^2} = \int (x - \xi)^2 W(x, t + \tau; \xi, t) dx$$

تعتبر عادة مقياساً لعدم انتظام الحركة خلال هذه الفترة الزمنية. ويعنى المطلب 2° افتراض الارتباط الخطي للمتوسط التربيعي بالزمن لقيم τ الصغيرة.

3°

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{(x - \xi)^3}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int |x - \xi|^3 W(x, t + \tau; \xi, t) dx = 0. \quad (7)$$

والدالة $W(x, t + \tau; \xi, t)$ وهي دالة المصدر النقطي لقيم τ الصغيرة يجب أن تتناقص بسرعة عندما $|x - \xi| \rightarrow \infty$ وتزايد عندما يكون $|x - \xi|$ صغيراً.

وللحصول على معادلة اينشتين - كولموجوروف التفاضلية نضرب طرفي المعادلة (4) في دالة اختيارية $\psi(x)$ نؤول إلى الصفر هي ومشتقتها على حدود منطقة التكامل وتكامل الناتج على كل هذه المنطقة :

$$\begin{aligned} \int W(x, t + \tau; x_0, t_0) \psi(x) dx &= \\ &= \int W(\xi, t; x_0, t_0) d\xi \int W(x, t + \tau; \xi, t) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

وبفك الدالة $\psi(x)$ في الطرف الأيمن بتسلسلة تيلور بقوى $x - \xi$:

$$\psi(x) = \psi(\xi) + \psi'(\xi)(x - \xi) + \frac{\psi''(\xi)}{2}(x - \xi)^2 + \frac{\psi'''(\xi)}{3!}(x - \xi)^3,$$

حيث ξ^* قيمة متوسطة محصورة بين x و ξ وبالقسمة على τ نحصل بعد اختصارات بسيطة على :

$$\begin{aligned} \int \psi(x) \frac{W(x, t + \tau; x_0, t_0) - W(x, t; x_0, t_0)}{\tau} dx &= \\ &= \int W(\xi, t; x_0, t_0) \left[\psi'(\xi) \frac{x - \xi}{\tau} + \psi''(\xi) \frac{(x - \xi)^2}{2\tau} \right] d\xi + \\ &+ \frac{1}{3!} \int \int \psi'''(\xi^*) (x - \xi)^3 W(\xi, t; x_0, t_0) W(x, t + \tau; \xi, t) d\xi dx. \end{aligned}$$

وبفرض أن $\psi'''(x)$ محدودة

$$|\psi'''(x)| < A$$

مع الأخذ في الاعتبار أن

$$\int W(\xi, t; x_0, t_0) d\xi = 1,$$

نحصل على

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\tau} \int \int \psi'''(\xi^*) (x - \xi)^3 W(\xi, t; x_0, t_0) W(x, t + \tau; \xi, t) d\xi dx \right| &\leq \\ &\leq \frac{A}{\tau} \int |x - \xi|^3 W(x, t + \tau; \xi, t) dx = \frac{A|x - \xi|^3}{\tau}. \end{aligned}$$

ومن الشرط 3° ينتج أن هذه الصيغة تؤول إلى الصفر عندما $\tau \rightarrow 0$. ولذا فبالانتقال إلى النهاية عندما $\tau \rightarrow 0$ والاستعانة بالشرطين 1°، 2° نحصل على :

$$\int \psi(x) \frac{\partial W(x, t; x_0, t_0)}{\partial t} dx = \int W(\xi, t; x_0, t_0) [\psi'(\xi) A(\xi, t) + \psi''(\xi) B(\xi, t)] d\xi.$$

وبعد إجراء التكامل بالتجزئة للطرف الأيمن والأخذ في الاعتبار أن الدالة ψ تتحول إلى الصفر هي ومشتقاتها على حدود منطقة التكامل - نحصل على :

$$\int \psi(x) \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial (AW)}{\partial x} - \frac{\partial^2 (BW)}{\partial x^2} \right] dx = 0.$$

وحيث إن هذه العلاقة يجب أن تتحقق لأية دالة اختيارية $\psi(x)$ فإننا نحصل لدالة الاحتمالات $W(x, t; x_0, t_0)$ على معادلة أينشتاين - كولوجوروف التفاضلية

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial (AW)}{\partial x} + \frac{\partial^2 (BW)}{\partial x^2}. \quad (8)$$

وهذه المعادلة الناتجة هي معادلة من النمط المكافئ مثل معادلة التوصيل الحرارى ويمكن أن تكتب على الصورة :

$$W_t = \frac{\partial}{\partial x} (BW_x) + \alpha W_x + \beta W, \quad (9)$$

حيث

$$\alpha = -A + B_{xx}, \quad \beta = -A_x + B_{xx} = \alpha_x.$$

ويتضح من المعادلة (9) أن المقدار B له معنى فيزيائى وهو معامل الانتشار. وإذا كانت العملية محل الدراسة متجانسة في الفراغ والزمن أى أن الدالة W تعتمد فقط على الفرقين $\xi = x - x_0$, $\theta = t - t_0$. فإن المعاملين B , A لا يعتمدان على x , t ويكونان ثابتين. والمعادلة (8) في هذه الحالة تصبح معادلة بمعاملات ثابتة

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -A \frac{\partial W}{\partial x} + B \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (10)$$

وإذا اعتمدت الدالة W على $|x - \xi|$ فقط أى أن احتمالى الإزاحة إلى اليمين وإلى اليسار بمسافتين متساويتين من النقطة ξ متساويان - فإنه من الواضح أن A يجب أن يكون مساوياً للصفر. ويتبع ذلك تحليلاً من العلاقة (5) نظراً لأن الدالة المكاملة دالة فردية.

وفى هذه الحالة تكون المعادلة (8) هي المعادلة المبسطة للتوصيل الحرارى

$$\frac{\partial W}{\partial t} = B \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (11)$$

ملحق ٦ - دالة دلتا

فقرة ١ : تعريف دالة دلتا . بالإضافة إلى المقادير الموزعة باتصال (الكتلة ، الشحنة ، المصادر الحرارية ، الدفع الميكانيكي وغير ذلك) كثيرًا ما نضطر إلى التعامل مع المقادير المركزة (الكتلة النقطية ، الشحنة النقطية ، المصدر الحراري النقطي ، الدفع المركز... الخ) . ولا يجب أن ننسى أن هذه المفاهيم هي عبارة عن «نماذج نهائية» ويمكن تحديدها بواسطة مفهوم «الدوال المعممة» .

وبالأخذ في الاعتبار المعنى الفيزيائي للمسألة ندرس الجهد (potential) في النقطة M (انظر الباب الرابع ، بند ٥) لوحدة الكتلة المركزة داخل حجم ما T في جوار النقطة M_0 . نأخذ متتابعة ما للدوال $\{\rho_n\}$ ($\rho_n > 0$) وكل دالة من هذه الدوال تساوي الصفر خارج الكرة $S_{e_n}^{M_0}$ التي نصف قطرها e_n ومركزها في النقطة M_0 . حيث $e_n \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$ ويكون لها ابتداء من عدد n :

$$\int_T \int \rho_n(P) d\tau_P = \int_{S_{e_n}^{M_0}} \int \rho_n(P) d\tau_P = 1. \quad (1)$$

وبدراسة متتابعة الدوال

$$u_n = \int_T \int \frac{\rho_n}{r} d\tau,$$

التي تعتبر جهودًا للكتل الموزعة بالكثافات ρ_n . والانتقال إلى النهاية عندما $n \rightarrow \infty$ نحصل على :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{r_{M_0 M}}. \quad (2)$$

وهذه النتيجة ، كما هو واضح ، لا تعتمد على اختيار المتتابعة $\{\rho_n\}$. ورغم أن المتتابعة $\{u_n\}$ تتقارب إلى $1/r$ فالمتتابعة $\{\rho_n\}$ ليس لها نهاية في فئة الدوال متقطعة القابلية للتفاضل محل الدراسة . و «النموذج النهائي» المناظر للمتتابعة $\{\rho_n\}$ يسمى بدالة دلتا $\delta(M, M_0)$.

والصفة الأساسية المميزة لدالة دلتا هي العلاقة المؤثرية الشكلية التالية :

$$\int_T \int \delta(M_0, M) f(M) d\tau_M = \begin{cases} f(M_0), & M_0 \in T, \\ 0, & M_0 \notin T, \end{cases} \quad (3)$$

حيث $f(M)$ دالة اختيارية متصلة في النقطة M . وبالأخذ في الاعتبار أنه عند $n \rightarrow \infty$ تؤول الدوال p_n بانتظام إلى الصفر في أية منطقة لا تحتوي على M_0 وتزداد بلا حدود في الجوار للنقطة $S_n^{M_0}$ ، تعرف دالة دلتا أحياناً بواسطة العلاقات

$$\left. \begin{aligned} \delta(M, M_0) &= 0 & , & & M \neq M_0, \\ \delta(M, M_0) &= \infty & , & & M = M_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

و

$$\iint_T \delta(M, M_0) d\tau_M = \begin{cases} 1 & , & M_0 \in T, \\ 0 & , & M_0 \notin T. \end{cases} \quad (5)$$

والمساوية (5) تعتبر نتيجة واضحة للعلاقة (3) عندما $f = 1$.

وعند دراسة متتابعات الدوال في مختلف المسائل نضطر إلى التعامل مع تعريفات مختلفة للتقارب.

فيقال إن متتابعة الدوال

$$\{u_n(x)\} = u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots \quad (6)$$

تتقارب بانتظام في الفترة (a, b) إذا أمكن لأي $\varepsilon > 0$ الإشارة إلى ذلك العدد N بحيث أنه عندما $n, m > N$ يتحقق لأي x من (a, b) الشرط

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon \quad \text{عند } n, m > N.$$

ويقال إن للمتتابعة (6) تتقارب في المتوسط في الفترة (a, b) إذا أمكن لأي $\varepsilon > 0$ الإشارة إلى ذلك العدد N بحيث إنه عندما $n, m > N$ يكون

$$\int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^p dx < \varepsilon.$$

ويقال إن المتتابعة (6) تتقارب بضعف في الفترة (a, b) إذا وجدت لأية دالة متصلة φ النهاية التالية :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) u_n(x) dx.$$

وعند دراسة المتتابعات المتقاربة تدرج عادة العناصر (الحدود) النهائية للمتتابعات. ندرس فئة الدوال المتصلة في الفترة (a, b) . في حالة التقارب المنتظم يكون العنصر (الحد) النهائي متممياً إلى نفس فئة الدوال وهذا ما لا يتحقق دائماً للتقارب في المتوسط وللتقارب الضعيف.

وإذا كان العنصر النهائي لا ينتمى إلى فئة الدوال المدروسة فإن العناصر النهائية يتم إدراجها بحيث نوسع بذلك الفئة الأصلية. وعند ذلك نقصد بالتوسيع مجمل العناصر الأصلية والنهائية. ونقابل مفهوم التوسيع في نظرية الأعداد الحقيقية عندما تدرج الأعداد غير المنطقية (irrational numbers) كعناصر نهائية معروفة بفئة المتتابعات المتكافئة.

وعندما نتحدث عن العناصر النهائية في معنى التقارب الضعيف سنقول إن متابعتين $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ هما نفس العنصر النهائي إذا كانت المتابعتان متكافئتين أى إذا كانت المتابعة $\{u_n - v_n\}$ تقارب بضعف إلى الصفر :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) [u_n(x) - v_n(x)] dx = 0.$$

وتسمى متابعة الدوال غير السالبة $\{\delta_n\}$ متابعة متوحدة محلية للنقطة x_0 (local normalized sequence) إذا كانت الدالة δ_n مساوية للصفر خارج الفترة $(x_0 - \epsilon_n, x_0 + \epsilon_n)$ حيث $\epsilon_n \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$ و

$$\int_a^b \delta_n(x) dx = 1.$$

ومن الواضح أن المتابعة $\{\delta_n\}$ تقارب بضعف. والعنصر النهائي للمتابعة $\{\delta_n\}$ يسمى عادة بدالة δ للنقطة x_0 .

وفي تلك الحالة عندما يخرج العنصر النهائي u . بمعنى التقارب الضعيف للمتابعة $\{u_n\}$. من فئة الدوال u_n فإن تكامل حاصل ضرب دالة ما $f(x)$ في العنصر u يعرف بوصفه النهاية

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) u_n(x) dx = \int_a^b f(x) u dx.$$

ومن الواضح أنه لدالة دلتا للنقطة x_0 تتحقق المتساوية

$$\int_a^b f(x) \delta(x_0, x) dx = f(x_0).$$

وهذه العلاقة كثيرًا ما تعتبر تعريفًا لدالة دلتا.

فقرة ٢ : تحليل دالة دلتا في متسلسلة فورييه . يمكن أيضًا تعريف دالة دلتا بوصفها نموذجًا نهائيًا لمتتابعات أخرى متكافئة بمعنى التقارب الضعيف للمتتابعة الواردة أعلاه $\delta_n(x)$ من الدوال المحلية المتوحددة في الدالة x_0 .

ندرس متتابعة الدوال

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_n(x_0, x) &= \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^n \left(\cos \frac{m\pi}{l} x_0 \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x + \sin \frac{m\pi}{l} x_0 \sin \frac{m\pi}{l} x \right) = \\ &= \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^n \cos \frac{m\pi}{l} (x - x_0) \end{aligned} \quad (7)$$

أو في الصورة المركبة

$$\bar{\delta}_n(x, x_0) = \frac{1}{2l} \sum_{m=-n}^n e^{im \frac{\pi}{l} (x-x_0)}, \quad (7')$$

المعرفة في الفترة $(-l, l)$.

ومن الواضح أنه لأية دالة $g(x)$ قابلة للتحليل في متسلسلة فورييه تتحقق المتساوية النهائية التالية :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-l}^l \bar{\delta}_n(x_0, x) g(x) dx = g(x_0), \quad (8)$$

التي تبين أن في فئة الدوال $\{g(x)\}$ القابلة للتحليل في متسلسلة فورييه تكون المتتابعة الواردة أعلاه $\delta_n(x_0, x)$ مكافئة بمعنى التقارب الضعيف للمتتابعة $\bar{\delta}_n(x_0, x)$ ، أى أن

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi}{l} (x_0 - x), \quad (9)$$

وذلك إذا ما فهمنا هذه المساواة على أساس وجهة نظر التقارب الضعيف الواردة أعلاه .

ومن وجهة النظر هذه نتحقق المساواة

$$\delta(x_0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_n(x_0), \quad (10)$$

حيث $\{\varphi_n(x)\}$ مجموعة كاملة ومتعامدة ومتوحددة من الدوال معرفة في فترة ما (a, b) . وكذلك نتحقق المساواة :

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x_0-x)} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos k(x_0-x) dk. \quad (11)$$

نبين أنه عند حساب التكاملات المحتوية على دالة دلتا يمكن الاستعانة بالمتسلسلة (9) بإجراء التكامل حدًا حدًا للدالة المكاملة .

ندرس دالة ما $g(x)$ قابلة للتحليل في متسلسلة فورييه ، والتكامل

$$\int_{-l}^l g(x) \delta(x_0, x) dx.$$

بالتعويض هنا عن $\delta(x_0, x)$ بصيغتها من العلاقة (9) نجرى عملية التكامل حدًا حدًا للمتسلسلة الموجودة تحت علامة التكامل . فنحصل في النهاية على :

$$g(x) = \frac{\bar{g}_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\bar{g}_m \cos \frac{\pi m}{l} x + \bar{g}_m \sin \frac{\pi m}{l} x \right), \quad (11')$$

حيث

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x_0) dx_0, \\ \bar{g}_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x_0) \cos \frac{\pi m}{l} x_0 dx_0, \\ \bar{g}_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x_0) \sin \frac{\pi m}{l} x_0 dx_0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

وتبين مقارنة العلاقة (11) بالمتساوية

$$\int_{-l}^l \delta(x, x_0) g(x) dx = g(x_0) \quad (-l < x_0 < l)$$

أن عملية التكامل حدًا حدًا التي أجريناها أعلاه لمتسلسلة دالة دلتا تؤدي إلى نتيجة صحيحة .

وبذلك ففي فئة الدوال القابلة للتحليل في متسلسلة فورييه تكون متتابعة المجاميع الجزئية :

$$\frac{1}{2l} \sum_{n=-h}^h e^{i \frac{\pi n}{l} (x-x')}$$

مكافئة للمتتابعة المحلية المتوحدة $\{\delta_n\}$.

والصور الأخرى لتمثيل دالة دلتا مبنية أيضًا على الاستعانة ببعض المتتابعات الدالية المكافئة بمعنى التقارب الضعيف للمتتابعة $\{\delta_n\}$.

فقرة ٣ : تطبيق دالة دلتا لتكوين دالة المصدر . ندرس المسألة التالية :

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (13)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (14)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (15)$$

والدالة المعطاة $\varphi(x)$ يناظرها حل وحيد للمسألة

$$u(x, t) = \mathcal{L}[\varphi(x)].$$

نفرض أن المؤثر \mathcal{L} يمكن التعبير عنه في الصورة :

$$u(x, t) = \mathcal{L}[\varphi(x)] = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (16)$$

حيث $G(x, \xi, t)$ نواة المؤثر \mathcal{L} .

ولتعيين النواة $G(x, \xi, t)$ نضع

$$\varphi(x) = \delta(x - x_0). \quad (14')$$

وباستبدال $\varphi(x)$ بدالة دلتا في العلاقة (16) نحصل على :

$$u(x, t) = G(x, x_0, t), \quad (17)$$

أى أن $G(x, x_0, t)$ تعتبر حلاً للمسألة (13) بالشرط الابتدائى (14').

نغير عن دالة دلتا بمتسلسلة فورييه

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x_0.$$

ومن الواضح أن النواة G يجب البحث عنها في صورة المجموع :

$$G(x, x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (18)$$

الذى يجب أن يحقق كل حد من حدوده معادلة التوصيل الحرارى . ومن هنا يتبع أن

$$A_n(t) = B_n e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.$$

ومن الشرط الابتدائى نحصل مباشرة على

$$B_n = \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x_0.$$

وبذلك حصلنا شكلياً للنواة G على الصيغة :

$$G(x, x_0, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x_0. \quad (19)$$

التي تنطبق على تمثيل دالة المصدر الذى بحثناه في بند ٣. ويعطى حل المسألة

(15) - (13) بالعلاقة (16) حيث $G(x, x_0, t)$ دالة معرفة بالعلاقة (19).

وبنفس الطريقة يمكن تعيين صيغة دالة المصدر للمستقيم اللانهائى . فالدالة G

في هذه الحالة ستعرف بالشروط

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad (-\infty < x < \infty), \quad (20)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \delta(x - x_0). \quad (21)$$

وبالأخذ في الاعتبار مفكوك دالة دلنا في تكامل فورييه

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda (x-x_0) d\lambda,$$

سنبحث عن $G(x, x_0, t)$ في الصورة

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A_{\lambda}(t) \cos \lambda (x-x_0) d\lambda. \quad (22)$$

ومن المعادلة (20) نعين

$$A_{\lambda}(t) = A_{\lambda}^{(0)} e^{-a^2 \lambda^2 t}. \quad (23)$$

وبوضع $t=0$ ومقارنة العلاقتين (21) ، (23) نجد أن

$$A_{\lambda}^{(0)} = 1.$$

وبذلك

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda (x-x_0) d\lambda.$$

ويعطى حساب هذا التكامل :

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}.$$

ومن هنا ينتج أن حل مسألة انتشار درجة الحرارة الابتدائية على المستقيم اللانهائي يجب التعبير عنه بالعلاقة :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (24)$$

ويتطلب توضيح حدود قابلية العلاقات الناتجة بطريقة دالة دلنا للتطبيق بحثاً خاصاً .

بمثابة مثال ندرس الآن المعادلة اللامتجانسة :

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{F(x, t)}{c\rho}, \quad (25)$$

حيث $F(x, t)$ كثافة المصادر الحرارية للوزعة . وإذا وضع عند النقطة $x = \xi$ في اللحظة $t = t_0$ مصدر حرارى لحظى قدرته Q_0 فإن

$$F(x, t) = Q_0 \delta(x - \xi) \delta(t - t_0). \quad (26)$$

نعين حل المعادلة اللامتجانسة

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q_0}{c\rho} \delta(x - \xi) \delta(t - t_0) \quad (t_0 > 0) \quad (27)$$

بالشرط الابتدائى الصفرى

$$u(x, 0) = 0.$$

وبالأخذ فى الاعتبار التمثيل التكاملى

$$\delta(x - \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda (x - \xi) d\lambda,$$

سنبحث عن الدالة $u(x, t)$ فى الصورة :

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty u_\lambda(t) \cos \lambda (x - \xi) d\lambda.$$

بالتعويض بهذه الصيغ فى المعادلة (27) نحصل على معادلة للدالة $u_\lambda(t)$:

$$\dot{u}_\lambda(t) + a^2 \lambda^2 u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho} \delta(t - t_0)$$

بالشرط الابتدائى

$$u_\lambda(0) = 0.$$

وكما هو معلوم يكون حل المعادلة اللاخطية

$$\dot{u} + a^2 u = f(t), \quad u(0) = 0$$

على الصورة :

$$u(t) = \int_0^t e^{-a^2(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (28)$$

وفى حالتنا

$$u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho} \int_0^t e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} \delta(\tau - t_0) d\tau = \begin{cases} 0 & , t < t_0 \\ \frac{Q_0}{c\rho} e^{-a^2 \lambda^2 (t-t_0)} & , t > t_0 \end{cases} \quad (29)$$

وبذلك فإن

$$u(x, t) = \frac{Q_0}{cp} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a\lambda^2(t-t_0)} \cos \lambda(x-\xi) d\lambda = \frac{Q_0}{cp} G(x, \xi, t-t_0),$$

حيث

$$G(x, \xi, t-t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

هي دالة تأثير المصدر اللحظي النقطة .

ومثل هذه الطريقة لتكوين دالة التأثير تستخدم كثيراً في الفيزياء النظرية .

الباب الرابع

المعادلات من النمط الناقصى

عند بحث العمليات المستقرة . مهما اختلفت الطبيعة الفيزيائية لكل عملية (ذبذبات . توصيل حرارى . انتشار .. الخ) . نصل عادة إلى معادلات على النمط الناقصى . وأكثر للمعادلات على هذا النمط انتشارا هي معادلة لابلاس :

$$\Delta u = 0.$$

والدالة u تسمى دالة توافقية في المنطقة T إذا كانت متصلة في هذه المنطقة هي ومشتقاتها حتى الرتبة الثانية وتحقق معادلة لابلاس .

وخلال دراسة خواص الدوال التوافقية عولجت ودرست طرق رياضية اتضحت فائدتها وفعاليتها أيضا عند التطبيق على المعادلات على النمطين الزائدى والمكافئ .

بند ١ - المسائل التى تؤدى إلى معادلة لابلاس

فقرة ١ : المجال الحرارى المستقر . صياغة المسائل الحديدية . ندرس مجالا حراريا مستقرا . في الباب الثالث أوضحنا أن درجة الحرارة في المجال الحرارى غير المستقر تحقق المعادلة التفاضلية للتوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 \Delta u \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho} \right).$$

وإذا كانت العملية مستقرة (لا تعتمد على الزمن) فإنه يوجد توزيع لدرجة الحرارة $u(x, y, z)$ لا يتغير مع مرور الزمن وبالتالي يحقق معادلة لابلاس

$$\Delta u = 0. \quad (1)$$

وعند وجود مصادر حرارية نحصل على المعادلة

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{k}. \quad (2)$$

حيث F كثافة المصادر الحرارية - k معامل التوصيل الحرارى . ومعادلة لابلاس اللامتجانسة (2) تسمى عادة بمعادلة بواسون .

ندرس حجما ما T محدودا بالسطح Σ . ومسألة توزيع درجة الحرارة داخل الجسم T تصاغ على الوجه التالى :

عين الدالة $u(x, y, z)$ التى تحقق داخل T المعادلة

$$\Delta u = -f(x, y, z) \quad (2)$$

والشرط الحدى الذى يمكن أخذه على إحدى الصور التالية :

(١) للسألة الحدية الأولى : $u = f_1$ على السطح Σ .

(٢) للسألة الحدية الثانية : $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ على السطح Σ .

(٣) للسألة الحدية الثالثة : $\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0$ على السطح Σ .

حيث f_1, f_2, f_3, h دوال معطاة . المشتقة بالنسبة إلى العمودى الخارجى على السطح Σ * .

والمعنى الفيزيائى لهذه الشروط الحدية واضح (انظر الباب الثالث - بند أ) . وكثيرا ما تسمى المسألة الحدية الأولى لمعادلة لابلاس بمسألة ديريشليت والمسألة الثانية تسمى بمسألة نېان .

وإذا كان يبحث عن الحل فى المنطقة T_0 الداخلية (أو الخارجية) بالنسبة إلى السطح Σ فإن المسألة المناظرة تسمى بالمسألة الحدية الداخلية (أو الخارجية) .

فقرة ٢ : التيار الجهدى للسائل (potential flow) . جهد التيار المستقر والمجال الكهروستاتيكى . ندرس بمثابة المثال الثانى التيار الجهدى للسائل بدون مصادر . نفرض أنه يوجد داخل حجم ما T حدوده Σ تيار مستقر لسائل لا متضغظ

* من الواضح أن التوزيع المستقر لدرجة الحرارة يمكن أن يحدث فقط بشرط أن يساوى الصفر الدفق الإجمالى للحرارة خلال حدود المنطقة . ومن هنا يتبع أن الدالة f_3 يجب أن تحقق شرطا إضافيا وهو :

$$\iint_{\Sigma} f_3 d\sigma = 0.$$

(الكثافة $\rho = \text{const}$) يميز بالسرعة $v(x, y, z)$. إذا كان تيار السائل غير دردورى (no vorteces) فإن السرعة v تعتبر متجها جهديا (محافظا) أى

$$v = -\text{grad } \phi, \quad (3)$$

حيث ϕ دالة مقياسية (scalar) تسمى بجهد السرعة . وإذا انعدمت المصادر فإن

$$\text{div } v = 0. \quad (4)$$

بالتعويض هنا بالصيغة (3) للسرعة v نحصل على :

$$\text{div grad } \phi = 0$$

أو

$$\Delta \phi = 0, \quad (5)$$

أى أن جهد السرعة يحقق معادلة لابلاس .

نفرض أنه فى وسط متجانس موصل يوجد تيار مستقر (كهربائى) ذو كثافة حجمية $j(x, y, z)$. وإذا انعدمت المصادر الحجمية للتيار فى الوسط فإن

$$\text{div } j = 0. \quad (6)$$

والمجال الكهربائى E يتحدد بواسطة كثافة التيار من قانون أوم التفاضلى

$$E = \frac{j}{\lambda}, \quad (7)$$

حيث λ موصلية الوسط . وحيث إن العملية مستقرة فإن المجال الكهربائى يعتبر غير دردورى أو يعتبر مجالا جهديا (محافظا) * . أى توجد تلك الدالة القياسية $\phi(x, y, z)$ بحيث يكون لها

$$E = -\text{grad } \phi \quad (j = -\lambda \text{ grad } \phi). \quad (8)$$

* من معادلة ماكسويل الثانية $\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = -\text{rot } E$ يتبع أن $\text{rot } E = 0$.

ومن هنا وعلى أساس العلاقتين (7) , (6) نستنتج أن

$$\Delta\varphi=0, \quad (9)$$

أى أن جهد المجال الكهربائى للتيار المستمر يحقق معادلة لابلاس .
ندرس المجال الكهربائى للشحنات المستقرة . ويتبع من استقرار العملية أن

$$\text{rot } E=0, \quad (10)$$

أى أن المجال جهدى (محافظ) و

$$E=-\text{grad } \varphi. \quad (8)$$

نفرض أن $\rho(x,y,z)$ هى الكثافة الحجمية للشحنات الموجودة فى الوسط
المميز بمعامل العازل (dielectric coefficient) $\epsilon = 1$. وانطلاقا من القانون
الأساسى للكهروديناميكا

$$\int_S E_n dS = 4\pi \sum e_i = 4\pi \int_T \rho d\tau, \quad (11)$$

حيث T حجم ما . S السطح الذى يحده . $\sum e_i$ مجموع كل الشحنات
داخل T . وبلاستعانة بنظرية اوستروجرادسكى

$$\int_S E_n dS = \int_T \text{div } E d\tau, \quad (12)$$

نحصل على :

$$\text{div } E = 4\pi\rho.$$

بالتعويض هنا بالصيغة (8) بدلا من E نحصل على :

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (13)$$

أى إن الجهد الكهروستاتيكي φ يحقق معادلة بواسون . وإذا انعدمت الشحنات
الحجمية ($\rho=0$) فإن الجهد φ يجب أن يحقق معادلة لابلاس

$$\Delta\varphi=0.$$

والمسائل الحدية الأساسية للعمليات السابق دراستها تنتمي إلى الأنواع الثلاثة الواردة أعلاه. ولن نتوقف هنا عند بعض المسائل الحدية الأخرى التي تميز مختلف العمليات الفيزيائية. وبعض هذه المسائل سنورده في الملاحق.

فقرة ٣: معادلة لابلاس في مجموعة الإحداثيات المنحنية. نستنبط صيغة مؤثر لابلاس في مجموعة الإحداثيات المتعامدة المنحنية. نفرض أنه مدرجة في الفراغ مجموعة الإحداثيات للمنحنى q_1, q_2, q_3 - بدلا من مجموعة الإحداثيات الكرتيزية x, y, z بالعلاقات

$$q_1 = f_1(x, y, z), \quad q_2 = f_2(x, y, z), \quad q_3 = f_3(x, y, z), \quad (14)$$

وبحلها بالنسبة إلى x, y, z يمكن أن نكتب:

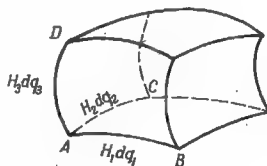
$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3). \quad (15)$$

بوضع $q_1 = C_1, q_2 = C_2, q_3 = C_3$ حيث C_1, C_2, C_3 ثوابت. نحصل على ثلاث عائلات من السطوح الإحداثية:

$$f_1(x, y, z) = C_1, \quad f_2(x, y, z) = C_2.$$

$$f_3(x, y, z) = C_3. \quad (16)$$

ندرس عنصر الحجم في الإحداثيات الجديدة المحدود بثلاثة أزواج من السطوح الإحداثية (شكل ٤٤). وعلى الضلع



شكل ٤٤

AB يكون $q_3 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$. وعلى الضلع AD يكون $q_1 = \text{const}$. و $q_2 = \text{const}$. وعلى الضلع AC يكون $q_1 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$. وجوب التمام الاتجاهية للمساحات الأضلاع AB, AC, AD متناسبة على الترتيب مع

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1}; \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2}; \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3}.$$

وشرط تعامد الأضلاع سيكون على الصورة:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_k} = 0 \quad (i \neq k). \quad (17)$$

نحسب عنصر الطول في الإحداثيات الجديدة .

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3} dq_3 \right)^2. \quad (18)$$

وبفك الأقواس مع أخذ شرط التعماد (17) في الاعتبار نحصل على :

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \quad (19)$$

حيث

$$\left. \begin{aligned} H_1^2 &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \right)^2, \\ H_2^2 &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \right)^2, \\ H_3^2 &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

وعلى امتداد كل ضلع من عنصر الحجم يتغير إحداثي واحد فقط ولذا نحصل لأطوال هذه الأضلاع وفقا للعلاقة (19) على :

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3, \quad (21)$$

ومن ثم فعنصر الحجم يكون مساويا

$$dv = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (22)$$

ندرس الآن مجالا اتجاهايا ما $A(x, y, z)$. نحسب $\text{div } A$ الذى يعرف بالعلاقة المعروفة من علم التحليل الاتجاهى :

$$\text{div } A = \lim_{v_M \rightarrow 0} \frac{\int_S A_n dS}{v_M}, \quad (23)$$

حيث S السطح الذى يحد حجما ما v_M يحتوى النقطة محل الدراسة M . نطبق هذه العلاقة على عنصر الحجم dv المبين بشكل ٤٤ .

وبالاستعانة بنظرية القيمة للتوسطة يمكن التعبير عن الفرق بين دفتى المتجه A خلال وجهى الحجم المتقابلين ، على سبيل المثال خلال الوجهين الأيمن والأيسر . على الصورة :

$$Q_1 = A_1 ds_2 ds_3 |_{q_1+dq_1} - A_1 ds_2 ds_3 |_{q_1}.$$

وبالأخذ فى الاعتبار العلاقات (21) نحصل على :

$$Q_1 = [H_2 H_3 A_1 |_{q_1+dq_1} - H_2 H_3 A_1 |_{q_1}] dq_2 dq_3 = \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 A_1) dq_1 dq_2 dq_3. \quad (24)$$

وبالمثل بحسب الفرقان الآخرين للدفوق خلال الأوجه المتقابلة :

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 A_2) dq_1 dq_2 dq_3, \quad (25)$$

$$Q_3 = \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 A_3) dq_1 dq_2 dq_3. \quad (26)$$

بالتعويض فى العلاقة (23) بقيمة $Q_1 + Q_2 + Q_3$ وبالاستعانة بالعلاقة (22) نحصل على صيغة التباعد (div) فى الإحداثيات للمتعامدة المنحنية :

$$\text{div } A = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 A_3) \right]. \quad (27)$$

نفرض أن المجال A جهدى (محافظ) أى أن

$$A = \text{grad } u. \quad (28)$$

وعندئذ يكون

$$A_1 = \frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}; \quad A_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}; \quad A_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3}. \quad (29)$$

بالتعويض فى (27) بصيغ A_1, A_2, A_3 من (29) نحصل على صيغة مؤثر لابلاس

$$\Delta u = \text{div grad } u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (30)$$

وبذلك فعادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في الإحداثيات المتعامدة المنحنية q_1, q_2, q_3 تكتب على الصورة التالية :

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right] = 0. \quad (31)$$

ندرس حالتين خاصتين :

١ - الإحداثيات الكروية (القطبية الفراغية) . في هذه الحالة $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$ وتأخذ علاقات التحويل (15) الصورة التالية :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

نحسب ds^2 :

$$ds^2 = (\sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi)^2 + (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2;$$

وبعد فك الأقواس والاختصارات نحصل على

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

أي أن

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \theta.$$

بالتعويض عن قيم H_1, H_2, H_3 في العلاقة (31) نحصل على معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية :

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = 0$$

أو نهائيا نحصل على :

$$\Delta_{r, \theta, \varphi} u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (32)$$

٢ - الإحداثيات الاسطوانية . في هذه الحالة لدينا $q_1 = \rho$ ،

$$q_2 = z, \quad q_3 = \varphi$$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

ومن ثم فإن

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

ومعادلة لابلاس في الإحداثيات الأسطوانية تأخذ الصورة :

$$\Delta_{\rho, \varphi, z} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (33)$$

وإذا كانت الدالة المجهولة u لا تعتمد على z فإن المعادلة (33) تأخذ صورة مبسطة* :

$$\Delta_{\rho, \varphi} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (34)$$

فقرة ٤ : بعض الحلول الخاصة لمعادلة لابلاس . تشكل حلول معادلة لابلاس ذات التماثل الكروي أو الأسطواني . أى تلك الحلول التى تعتمد فقط على متغير واحد r أو ρ ، أهمية خاصة .

فحل معادلة لابلاس $u = U(r)$ ذو التماثل الكروي سيتحدد من المعادلة التفاضلية العادية

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0.$$

وبتكامل هذه المعادلة نجد أن

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

حيث C_1, C_2 ثابتان اختياريان . بوضع مثلاً $C_1 = 1, C_2 = 0$ نحصل على الدالة

• وتكتب أيضاً في الصورة :

$$\Delta_{\rho, \varphi} u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

(ملاحظة للترجم).

$$U_0 = \frac{1}{r}, \quad (35)$$

التي كثيراً ما تسمى بالحل الأساسي لمعادلة لابلاس في الفراغ .
وبالمثل بفرض

$$u = U(\rho)$$

وبالاستعانة بالمعادلة (33) أو (34) نعين الحل ذا التماثل الأسطواني أو التماثل
الدائري (في حالة المتغيرين المستقلين) على الصورة

$$U(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2.$$

وباختيار $C_1 = -1$ و $C_2 = 0$ نجد أن

$$U_0 = \ln \frac{1}{\rho}. \quad (36)$$

والدالة $U_0(\rho)$ كثيراً ما تسمى بالحل الأساسي لمعادلة لابلاس في المستوى
(للمتغيرين المستقلين).

والدالة $U_0 = \frac{1}{r}$ تحقق المعادلة $\Delta u = 0$ في كل مكان إلا النقطة $r = 0$
حيث تتوول فيها إلى المالا نهاية . وبدقة حتى معامل تناسب تنطبق هذه الدالة على
مجال الشحنة النقطية e الموجودة في نقطة أصل الإحداثيات . وجهد هنا المجال
يساوى

$$u = \frac{e}{r}.$$

وبالمثل فالدالة $\ln \frac{1}{\rho}$ تحقق معادلة لابلاس في كل مكان إلا النقطة $\rho = 0$
حيث تتوول فيها إلى المالا نهاية (الموجبة) وبدقة حتى معامل ثابت تنطبق هذه الدالة
على مجال الخط المشحون (انظر تفصيل هذا الموضوع في بند ٥ - فقرة ٢) الذي
جهده يساوى

$$u = 2e_1 \ln \frac{1}{\rho},$$

حيث e_1 كثافة الشحنة في وحدة الطول . وهاتان الدالتان لها أهمية كبيرة في نظرية
الدوال التوافقية .

فقرة ٥ : الدوال التوافقية والدوال التحليلية في المتغير المركب . تعتبر طريقة استخدام الدوال في المتغير المركب لحل معادلة لابلاس في حالة المسائل الثنائية الأبعاد (في المستوى) طريقة عامة ومنتشرة للغاية .

نفرض أن

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

دالة ما في المتغير المركب $z = x + iy$. علمًا بأن u, v تعتبران دالتين حقيقيتين في المتغيرين x, y . وتشكل أهمية بالغة ما يسمى بالدوال التحليلية التي توجد لها المشتقة :

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

والمتغير $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ من الواضح أنه يمكن أن يتوّل إلى الصفر بطرق كثيرة . ولكل طريقة من طرق اقتراب Δz إلى الصفر يمكن بوجه عام أن ينتج قيمة معينة للنهاية . غير أنه إذا كانت الدالة $w = f(z)$ تحليلية فإن النهاية $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$ لا تعتمد على اختيار طريق الاقتراب إلى الصفر .

والشروط اللازمة والكافية لتحليلية الدالة هي ما يسمى بشروط كوشي - ريمان التالية :

$$\left. \begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ويمكن الحصول على هذين الشرطين على سبيل المثال بالطريقة التالية :

نفرض أن $w = u + iv = f(z)$ دالة تحليلية . وحساب المشتقات :

$$\begin{aligned} w_x &= u_x + iv_x = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_x = \frac{dw}{dz} \\ w_y &= u_y + iv_y = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_y = i \frac{dw}{dz} \end{aligned}$$

ويطلب تساوى قيمتي المحددتين بهاتين العلاقتين نحصل على :

$$u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{dw}{dz}.$$

ومن هنا نتج شروط كوشى - ريمان . ولن نتوقف عند إثبات كفاية هذين الشرطين .

وفى نظرية الدوال فى المتغير المركب يتم إثبات أن الدالة التحليلية فى منطقة ما G فى المستوى $z = x + iy$ يكون لها فى هذه المنطقة مشتقات من جميع الرتب ويمكن تحليلها فى متسلسلة قوى . وكحالة خاصة يوجد لمثل هذه الدالة الدالتان $u(x, y)$. $v(x, y)$ ولهما مشتقات متصلة من الرتبة الثانية فى x و y .

وبتفاضل المتساوية الأولى من العلاقتين (37) بالنسبة إلى x والثانية بالنسبة إلى y نحصل على :

$$\Delta_2 u = 0 \quad \text{أو} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

وبنفس الطريقة بتغيير ترتيب عملية التفاضل نحصل على :

$$\Delta_2 v = 0 \quad \text{أو} \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

وبذلك فإن كلا من الجزء الحقيقى والجزء التخيلى للدالة التحليلية يحقق معادلة لابلاس . ويقال عادة إن الدالتين u . v اللتين تحققان شرطى كوشى - ريمان تعتبران دالتين توافقيتين متوافقتين .

ندرس التحويل

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u, v), & u &= u(x, y), \\ y &= y(u, v), & v &= v(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

الذى يعكس انعكاساً متبادلاً أحادى القيمة منطقة ما G من المستوى (x, y) فى منطقة G' من المستوى (u, v) بحيث إن كل نقطة من نقاط المنطقة G تناظرها نقطة معينة فى المنطقة G' . وبالعكس كل نقطة من نقاط المنطقة G' تناظرها نقطة معينة فى المنطقة G .

نفرض أن

$$U = U(x, y)$$

دالة ما حقيقية قابلة مرتين للتفاضل باتصال ومعرفة داخل المنطقة G

نوضح كيف يتغير عند هذا التحويل مؤثر لابلاس على الدالة
 $U = U(x(u, v), y(u, v)) = \tilde{U}(u, v)$

نحسب مشتقات الدالة

$$\begin{aligned} U_x &= \tilde{U}_u u_x + \tilde{U}_v v_x, & U_y &= \tilde{U}_u u_y + \tilde{U}_v v_y, \\ U_{xx} &= \tilde{U}_{uu} u_x^2 + \tilde{U}_{vv} v_x^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_x v_x + \tilde{U}_{uu} u_{xx} + \tilde{U}_{vv} v_{xx}, \\ U_{yy} &= \tilde{U}_{uu} u_y^2 + \tilde{U}_{vv} v_y^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_y v_y + \tilde{U}_{uu} u_{yy} + \tilde{U}_{vv} v_{yy}, \end{aligned}$$

ومن هنا نحصل على :

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} &= \tilde{U}_{uu} (u_x^2 + u_y^2) + \tilde{U}_{vv} (v_x^2 + v_y^2) + \\ &+ 2\tilde{U}_{uv} (u_x v_x + u_y v_y) + \tilde{U}_{uu} (u_{xx} + u_{yy}) + \tilde{U}_{vv} (v_{xx} + v_{yy}). \end{aligned} \quad (39)$$

وإذا كانت الدالتان u, v توافقتين مترافقتين فإن التحويل (38) يكافئ التحويل المتحقق بالدالة التحليلية

$$w = f(z) = u + iv \quad (z = x + iy). \quad (40)$$

وفي هذه الحالة ووفقاً لشرطى كوشي - ريمان (37) يجب أن تتحقق للدالتين u, v العلاقات التالية :

$$\begin{aligned} u_x^2 + u_y^2 &= u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2, \\ u_x v_x + u_y v_y &= 0. \end{aligned}$$

وتأخذ العلاقة (39) الصورة :

$$U_{xx} + U_{yy} = (\tilde{U}_{uu} + \tilde{U}_{vv}) |f'(z)|^2 \quad (41)$$

أو

$$\Delta_{uv} \tilde{U} = \frac{1}{|f'(z)|^2} \Delta_{x,y} U. \quad (41')$$

ومن هنا يتبع أنه بعد التحويل (40) تتحول الدالة $U(x, y)$ التوافقية في المنطقة θ إلى الدالة $\tilde{U} = U(u, v)$ التوافقية في المنطقة θ' فقط إذا كان $|f'(z)|^2 \neq 0$.

فقرة ٦ : تحويل مقلوبات متجهات الموضع * . عند دراسة الدوال التوافقية كثيراً ما يستخدم تحويل مقلوبات متجهات الموضع . إن تحويل مقلوبات متجهات الموضع في الكرة التي نصف قطرها a هو ذلك التحويل الذي يضع أية نقطة M في تناظر مع النقطة M' الواقعة على نفس الشعاع الخارج من نقطة الأصل . الذي تقع عليه النقطة M . ويرتبط متجه موضعها r بمتجه الموضع r' للنقطة M بالعلاقة :

$$r' r = a^2 \text{ أو } r' = \frac{a^2}{r}. \quad (42)$$

وفي المستقبل سنعتبر أن $a = 1$ وهو ما يمكن التوصل إليه دائماً بتغيير مقياس رسم الأطوال .

نوضح أن الدالة التوافقية في متغيرين مستقلين $u(p, \varphi)$ تتحول بتحويل مقلوبات متجهات الموضع إلى دالة توافقية :

$$u = \frac{1}{\rho'} \text{ حيث } v(p', \varphi) = u(p, \varphi) \quad (43)$$

بالفعل الدالة $u(p, \varphi)$ وبالتالي الدالة $v\left(\frac{1}{\rho}, \varphi\right)$ كالتين في المتغيرين ρ, φ تحققان الشروط :

$$\rho^2 \Delta_{p, \varphi} u = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

و

$$\rho'^2 \Delta_{p', \varphi} v = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

وبالانتقال إلى المتغيرين ρ', φ نحصل على

$$\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho'} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial \rho} = -\rho' \frac{\partial v}{\partial \rho'},$$

ومن هنا ينتج أن $v(p', \varphi)$ تحقق المعادلة $\Delta_{p', \varphi} v = 0$ وذلك لأن

$$\rho'^2 \Delta_{p', \varphi} v = \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\rho' \frac{\partial v}{\partial \rho'} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

• vector position ويسمى في المراجع الوصفية بنصف القطر للوجه radius - vector (للترجم) .

وبالانتقال إلى حالة المتغيرات الثلاثة المستقلة نوضح أن الدالة

$$r = \frac{1}{r} \quad \text{حيث} \quad v(r', \theta, \varphi) = ru(r, \theta, \varphi) \quad (44)$$

تحقق معادلة لابلاس $\Delta_{r, \theta, \varphi} v = 0$ إذا كانت الدالة $u(r, \theta, \varphi)$ دالة توافقية في متغيراتها $\Delta_{r, \theta, \varphi} u = 0$.

ويسمى عادة التحويل (44) بتحويل كلفن .

ومن السهل التحقق بواسطة عملية التفاضل المباشر من أن الحد الأول في مؤثر لابلاس (32) يتحول إلى الصورة :

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}. \quad (45)$$

ومن ثم فإن

$$r \Delta_{r, \theta, \varphi} u = \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] = 0$$

أو

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right] = 0.$$

وبملاحظة أن

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r'} \cdot \frac{\partial r'}{\partial r} = -r'^2 \frac{\partial v}{\partial r'},$$

نجد أن v تحقق المعادلة $\Delta_{r, \theta, \varphi} v = 0$ وذلك لأن

$$r'^2 \frac{\partial}{\partial r'} \left(r'^2 \frac{\partial v}{\partial r'} \right) + r'^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right] = 0,$$

أو

$$r'^4 \Delta_{r, \theta, \varphi} v = 0.$$

بند ٢ - الخواص العامة للدوال التوافقية

في هذا البند نورد التمثيل التكاملي للدوال التوافقية الذي يعتبر جهازاً أساسياً لدراسة الخواص العامة للدوال التوافقية . ويعتبر مبدأ القيمة العظمى ، الذي

سنستخدمه كثيراً في المستقبل سواء عند إثبات نظرية الوجدانية أو عند حل المسائل الحدية ، إحدى النتائج الهامة للعلاقة التكاملية . وهنا أيضاً سنعطى الصياغة الرياضية للمسائل الحدية الداخلية والخارجية لمعادلة لابلاس وستثبت وحدانية واستقرار حلول هذه المسائل .

فقرة ١ : علاقات جرين . التمثيل التكاملي للحل . عند دراسة المعادلات على النمط الناقصى سنستعين كثيراً بعلاقات جرين التي تعتبر نتيجة مباشرة من علاقة أوستروجرادسكى .

وتكون علاقة أوستروجرادسكى في أبسط حالة على الصورة :

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_\Sigma R \cos \gamma d\sigma, \quad (1)$$

حيث T حجم ما محدود بسطح أملس بدرجة كافية Σ ، و $R(x, y, z)$ دالة اختيارية متصلة داخل $T + \Sigma$ ولها مشتقات متصلة داخل T . و γ الزاوية بين اتجاه المحور z والعمودى الخارجى على Σ . وليس من الصعب التأكد من صحة هذه العلاقة بإجراء عملية التكامل بالنسبة إلى z .

وتكتب علاقة أوستروجرادسكى عادة على الصورة :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\tau = \int_\Sigma (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma, \quad (2)$$

حيث $d\tau = dx dy dz$ عنصر الحجم ، و $\alpha = (\widehat{nx})$ ، $\beta = (\widehat{ny})$ ، $\gamma = (\widehat{nz})$ الزوايا بين العمودى الخارجى n على السطح Σ والمحاور الإحداثية و P, Q, R دوال اختيارية قابلة للتفاضل * .

وإذا اعتبرنا P, Q, R مركبات متجه ما $A = Pi + Qj + Rk$ فإن علاقة أوستروجرادسكى (2) يمكن كتابتها في الصورة التالية :

* في المستقبل سنفترض أن علاقة أوستروجرادسكى قابلة للتطبيق على تلك المناطق التي ستعامل معها . ومثل هذه السطوح هي على سبيل المثال السطوح ذات الانحناء للتقطع الاتصال وكذلك سطوح ليايبنوف (انظر بند ٥) .

$$\iiint_T \operatorname{div} A \, d\tau = \iint_{\Sigma} A_n \, d\sigma, \quad (2')$$

حيث

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$A_n = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$$

مركبة المتجه A على امتداد العمودى الخارجى .

وننتقل الآن إلى استنباط علاقات جرين .

نفرض أن $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ حالتان متصلتان هما ومشتقاتهما الأولى داخل $T + \Sigma$ ولهما مشتقات من الرتبة الثانية متصلة داخل T .
نفرض أن

$$P = u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R = u \frac{\partial v}{\partial z}$$

والاستعانة بعلاقة اوستروجرادسكى (2') نصل إلى ما يسمى بعلاقة جرين الأولى :

$$\iiint_T u \Delta v \, d\tau = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma - \iiint_T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\tau. \quad (3)$$

$$\text{حيث } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ مؤثر لابلاس ,}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z} \text{ المشتقة باتجاه العمودى الخارجى .}$$

وإذا أخذنا في الاعتبار العلاقة*

$$\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v = \nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z},$$

* الرمز ∇ يسمى «نابلا» . والعلاقة المذكورة يسهل فهمها كحاصل ضرب قياسي لتجهين إذا علمنا أن

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

ويسمى ∇ أحيانا بمؤثر هاميلتون (ملاحظة للترجم).

فإن علاقة جرين يمكن التعبير عنها في الصورة :

$$\int_T \int_T u \Delta v \, d\tau = - \int_T \int_T \nabla u \nabla v \, d\tau + \int_\Sigma u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma. \quad (3')$$

وبتغيير دورى الدالتين u , v نحصل على :

$$\int_T \int_T v \Delta u \, d\tau = - \int_T \int_T \nabla v \nabla u \, d\tau + \int_\Sigma v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma. \quad (4)$$

ويطرح المساوية (4) من المساوية (3') نحصل على علاقة جرين الثانية

$$\int_T \int_T (u \Delta v - v \Delta u) \, d\tau = \int_\Sigma \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (5)$$

والمنطقة T يمكن أن تكون محدودة بعدة سطوح . وعلاقات جرين قابلة للتطبيق في هذه الحالة أيضًا علمًا بأن التكاملات السطحية يجب أخذها على كل السطوح التي تحد المنطقة T .

والدالتين $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ في المتغيرين المستقلين تتحقق علاقات جرين المماثلة للسابقة . فعلاقة جرين الثانية في المنطقة S التي حدودها C تكون على الصورة :

$$\int_S (u \Delta_2 v - v \Delta_2 u) \, dS = \int_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

حيث $dS = dx dy$ ، و ds عنصر طول القوس على امتداد C ، و $\Delta_2 v = v_{xx} + v_{yy}$ ، و $\frac{\partial}{\partial n}$ المشتقة باتجاه العمودى الخارجى n على المنحنى C .

وكما رأينا (بند ١ ، فقرة ٤) فإن الدالة $U_0(M) = \frac{1}{R}$ حيث $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ البعد بين النقطتين $M(x, y, z)$ و $M_0(x_0, y_0, z_0)$ تحقق معادلة لابلاس عندما $M \neq M_0$.

نفرض أن $u(M)$ حالة توافقية متصلة هي ومشتقاتها الأولى في المنطقة $T + \Sigma$ ولها مشتقات من الرتبة الثانية في T . ندرس الدالة $v = 1/R_{M_0}$ حيث M_0

نقطة داخلية ما في المنطقة T . وحيث إن هذه الدالة لها داخل T انفصال عند النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ فإنه لا يمكن تطبيق علاقة جرين الثانية تطبيقاً مباشراً في المنطقة T على الدالتين u, v . غير أن الدالة $v = 1/R_{MM_0}$ محدودة في المنطقة $T - K_0$ ذات الحدود $\Sigma + \Sigma_0$ حيث K_0 كرة نصف قطرها ε ومركزها في النقطة M_0 وسطها Σ_0 (شكل ٤٥) .



شكل ٤٥

بتطبيق علاقة جرين الثانية (5) على الدالتين $u, v = 1/R$ في المنطقة $T - K_0$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \iiint_{T-K_0} \left(u \Delta \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \Delta u \right) d\tau = \\ = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \iint_{\Sigma_0} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) d\sigma - \iint_{\Sigma_0} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \quad (6) \end{aligned}$$

وفي الطرف الأيمن لهذه المتساوية يعتمد التكاملان الثاني والثالث فقط على ε (التكامل الأول لا يعتمد على ε) . وبحساب المشتقة بالعمودى الخارجى للمنطقة $T - K_0$ على Σ_0 نجد أن :

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right|_{\Sigma_0} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) \right|_{r=\varepsilon} = - \frac{1}{\varepsilon^2},$$

ومن هنا

$$\iint_{\Sigma_0} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_0} u d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi \varepsilon^2 u^* = 4\pi u^*, \quad (7)$$

حيث u^* القيمة المتوسطة للدالة $u(M)$ على السطح Σ_0 . نختصر التكامل الثالث

$$\iint_{\Sigma_0} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 4\pi \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^*, \quad (8)$$

حيث $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^*$ القيمة المتوسطة للمشتقة العمودية $\frac{\partial u}{\partial n}$ على السطح الكروي Σ_0 . بالتعويض بالصيغتين (8) , (7) في العلاقة (6) والأخذ في الاعتبار أن

$\Delta(1/R)=0$ في $T-K_e$ نحصل على :

$$\int_{T-K_e} \int \int \left(-\frac{1}{R}\right) \Delta u \, d\tau = \int_{\Sigma} \int \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma + 4\pi u^* - 4\pi e \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* . \quad (9)$$

ويجعل نصف القطر e يؤول إلى الصفر نحصل على :

١ - $\lim_{e \rightarrow 0} u^* = u(M_0)$ وذلك لأن $u(M)$ حالة متصلة و u^* هي قيمتها

المتوسطة على السطح الكروي ذي نصف القطر e ومركزة في النقطة M_0 ،

٢ - $\lim_{e \rightarrow 0} 4\pi e \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 0$ لأنه ينتج من اتصال المشتقات الأولى للدالة $u(M)$ داخل T محدودية المشتقة العمودية

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

في جوار النقطة M_0 ،

٣ - وفقاً لتعريف التكامل المعتل (improper integral) يكون

$$\lim_{e \rightarrow 0} \int_{T-K_e} \int \int \left(-\frac{1}{R}\right) \Delta u \, d\tau = \int_T \int \int \left(-\frac{1}{R}\right) \Delta u \, d\tau .$$

ونتيجة للانتقال إلى النهاية المذكور $e \rightarrow 0$ نتوصل إلى علاقة جرين التكاملية الأساسية :

$$4\pi u(M_0) = - \int_{\Sigma} \int \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) - \frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma_P - \int_T \int \int \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0 P}} d\tau , \quad (10)$$

حيث $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ نقطة ذات إحداثيات ξ, η, ζ واقعة على السطح Σ .

وإذا كانت النقطة M_0 تقع خارج المنطقة T فإن $v = 1/R_{M_0 P}$ متصلة وتوافقية في جميع نقط المنطقة T^* ، ولذا نحصل في الطرف الأيسر من العلاقة (10) على صفر .

ندرس الحالة عندما M_0 تنتمي إلى السطح Σ . نفرض أن Σ له عند M_0 مستوى مماسي ميوله متصلة . والسطح الكروي Σ_e الذي نصف قطره e ومركزه

M_0 يقطع السطح Σ ويقسمه إلى جزأين Σ_1 , Σ_2 والجزء Σ_1 يقع داخل الكرة K_ε . نطبق علاقة جرين (5) على u و $v = 1/R$ في المنطقة $T - T_1$ حيث T_1 المنطقة المحدودة بالسطح Σ_1 وجزء السطح الكروي Σ_2 الواقع داخل T . والشكل العام للتحليلات التي أدت إلى العلاقة (9) يظل هنا دون تغير . وعند ذلك ينبغي فقط الأخذ في الاعتبار أن التكامل على $\Sigma_1 + \Sigma_2$ يؤول إلى $2\pi u(M_0)$ وإدخال التغيرات للنظرة في (8'), (8), (7). وفي النهاية نتوصل إلى علاقة تنتج من (10) بوضع 2π بدلاً من 4π .

ويتوحد هذه الحالات نكتب علاقة جرين الأساسية على الصورة

$$\Omega \cdot u(M_0) = - \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) \right] d\sigma_P - \int_T \int \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0 P}} d\tau_P, \quad (10')$$

حيث Ω تأخذ القيم التالية :

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \text{ إذا كانت النقطة } M_0 \text{ تقع داخل } T \\ \cdot \text{ إذا كانت النقطة } M_0 \text{ على الحدود } \Sigma \\ \cdot \text{ إذا كانت النقطة } M_0 \text{ تقع خارج } T \end{array} \right\} = \Omega$$

ونشير إلى أنه إذا كانت النقطة M_0 هي عبارة عن رأس مخروطي للسطح Σ فإن $\Omega = \alpha$ حيث α الزاوية المجسمة (solid angle) بين تماسات السطح Σ عند النقطة M_0 .

وللدالة التوافقية حيث $\Delta u = 0$ تأخذ العلاقة (10) الصورة :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) \right] d\sigma_P \quad (11)$$

(M_0 داخل T)

وبذلك فإن قيمة الدالة التوافقية في أية نقطة داخلية في المنطقة يعبر عنها بدلالة قيمة هذه الدالة ومشتقتها العمودية على سطح المنطقة . وعند ذلك يفترض اتصال

الدالة u ومشتقاتها الأولى في المنطقة وعلى الحدود . ونشير فوراً إلى أن كل تكامل من التكاملين

$$\int_{\Sigma} \int \mu(P) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P , \quad \int_{\Sigma} \int \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) v(P) d\sigma_P, \quad (12)$$

حيث v , μ دالتان متصلتان ، يعتبر دالة توافقية خارج السطح Σ . بالفعل فحيث إن الدالتين المكاملتين وكل مشتقاتها متصلة خارج السطح Σ فإن مشتقات الدالتين (12) من أية رتبة يمكن حسابها بواسطة عملية التفاضل تحت علامة التكامل . وعلاوة على ذلك ، حيث إن الدالتين

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{MP}} , \quad \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \alpha_P + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \beta_P + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \gamma_P \end{aligned}$$

نحققان معادلة لابلاس بالمتغيرات $M(x, y, z)$ ، فإنه وفقاً للمبدأ المعمم للترابك (انظر المأخوذة صفحة ٢٦٤) تحقق الدالتان (12) أيضاً معادلة لابلاس بالمتغيرات x, y, z .

ومن هنا تنتج نتيجة هامة : أية دالة توافقية داخل منطقة توافقيتها تكون قابلة للتفاضل عدداً لانهائياً من المرات * . ونشير أيضاً إلى أن الدالة التوافقية تحليلية (تحلل في متسلسلة قوى) في أية نقطة M_0 من نقط المنطقة T . ويمكن التأكد من ذلك بواسطة تحليلات مبنية على أساس نفس هذا التمثيل التكاملى (11) .

وتتحقق علاقات مماثلة أيضاً للدوال التوافقية في متغيرين اثنين مستقلين . نفرض أن S منطقة ما في المستوى (x, y) محدودة بالمنحنى C ، و n هو اتجاه العمودى على هذا المنحنى ، الخارجى بالنسبة إلى المنطقة S .

بالفرض فى علاقة جرين الثانية أن $v = \ln(1/R_{MP})$. حيث

* إذا لم يتحقق للدالة u التوافقية داخل T شرط اتصالها بمشتقاتها الأولى على السطح Σ فإن النظرية تحتفظ مع ذلك بصحتها وهو ما يمكن التأكد منه بإحاطة النقطة M بمنطقة واقعة هي وحدودها داخل T .

$R_{M_0P} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ هو بعد النقطة $P(x, y)$ عن نقطة مثبتة $M_0(x_0, y_0)$ ، وبإجراء تحليلات وخطوات مشابهة لتلك التي أجريناها لحالة المتغيرات الثلاثة المستقلة نحصل على علاقة جرين الأساسية في المستوى :

$$\Omega u(M_0) = \int_C \left[\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] ds_P - \int_S \Delta u(P) \ln \frac{1}{R_{M_0P}} ds_P,$$

حيث

$$\left. \begin{aligned} & 2\pi \text{ إذا كانت } M_0 \text{ تقع داخل } S \\ & \pi \text{ إذا كانت } M_0 \text{ تقع على } C \\ & 0 \text{ إذا كانت } M_0 \text{ تقع خارج } S \end{aligned} \right\} = \Omega$$

وإذا كانت $u(M)$ دالة توافقية داخل S وكانت النقطة M_0 تقع داخل S فإن :

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] ds_P.$$

فقرة ٢ : بعض الخواص الأساسية للدوال التوافقية . نثبت بعض الخواص الهامة للدوال التوافقية :

١- إذا كانت v دالة توافقية في المنطقة T المحدودة بالسطح Σ فإن

$$\int_S \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0, \quad (13)$$

حيث S أى سطح مغلق يقع كلية في المنطقة T .

بالفعل فبالتعويض في علاقة جرين الأولى (3') بدالة ما توافقية ($\Delta v = 0$) والبالاة $u \equiv 1$ نحصل فوراً على العلاقة (13) . ومن العلاقة (13) ينتج أن المسألة الحدية الثانية ($\Delta u = 0$ في T و $\frac{\partial u}{\partial n} = f|_{\Sigma}$) يمكن أن يكون لها حل فقط بشرط أن

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = 0.$$

وخاصية الدوال التوافقية هذه يمكن تفسيرها بوصفها شرطاً لانعدام المصادر داخل المنطقة T

٢- إذا كانت الدالة $u(M)$ توافقية في منطقة ما T وكانت M_0 نقطة ما تقع داخل T فإن العلاقة التالية تتحقق :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Sigma_a} u d\sigma, \quad (14)$$

حيث Σ_a سطح كروي نصف قطره a ومركزه في النقطة M_0 ويقع كلية في المنطقة T (نظرية القيمة المتوسطة).

وتؤكد هذه النظرية أن قيمة الدالة التوافقية في نقطة ما M_0 تساوي القيمة المتوسطة لهذه الدالة على أى سطح كروي Σ_a مركزه في M_0 إذا كان هذا السطح الكروي Σ_a لا يخرج خارج منطقة توافقية الدالة $u(M)$.

نطبق العلاقة (11) على الكرة K_a التي مركزها في النقطة M_0 وسطحها Σ_a :

$$4\pi u(M_0) = - \int_{\Sigma_a} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma.$$

وبالأخذ في الاعتبار أن $\frac{1}{R} = \frac{1}{a}$ على Σ_a وأن

$$\int_{\Sigma_a} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{\Sigma_a} = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{R=a} = -\frac{1}{a^2}$$

(ينطبق اتجاه العمودى الخارجى على Σ_a مع اتجاه نصف القطر) نحصل فوراً على

(14)*

• عند إثبات هذه النظرية استعنا بالمساوية (13) التي تفترض وجود المشتقات على سطح الكرة. وإذا كانت الدالة $u(M)$ متصلة في المنطقة للمخلة $T + \Sigma$ وتحقق للمعادلة $\Delta u = 0$ فقط في النقط الداخلية من T فإن الاستنتاج السابق للسطح الكروي Σ_{a_0} الذي يمر Σ سيكون غير مبرر. إلا أن النظرية صحيحة لأى $a < a_0$ وبالاتصال إلى النهاية عندما $a \rightarrow a_0$ نحصل على :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a_0^2} \int_{\Sigma_{a_0}} u(M) d\sigma.$$

وبكتابة (14) على الصورة :

$$4\pi\rho^2 u(M_0) = \int_{\Sigma_p} u(P) d\sigma_P$$

وإجراء التكامل بالنسبة إلى ρ من 0 إلى a نحصل على :

$$u(M_0) = \frac{1}{V_a} \int_{K_a} u d\tau_P, \quad V_a = \frac{4\pi}{3} a^3.$$

أى أن $u(M_0)$ هى القيمة المتوسطة فى حجم الكرة K_a ذات الحدود Σ_a .
ولحالة المتغيرين المستقلين تكون نظرية القيمة المتوسطة الماثلة صحيحة أيضاً :

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{C_a} u ds, \quad (15)$$

حيث C_a محيط دائرة نصف قطرها a ومركزها فى النقطة M_0 ، ويقع فى منطقة توافقية u .

٣- إذا كانت الدالة $u(M)$ معرفة ومتصلة فى المنطقة المغلقة $T + \Sigma$ وتحقق المعادلة $\Delta u = 0$ داخل T فإن الدالة $u(M)$ تصل إلى قيمها العظمى والصغرى على السطح Σ (مبدأ القيمة العظمى).

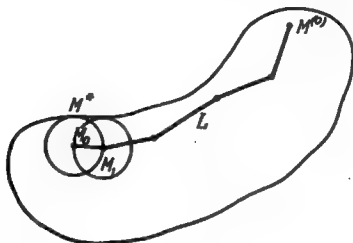
نفرض أن الدالة $u(M)$ تصل إلى قيمتها العظمى فى نقطة داخلية ما M_0 من نقط المنطقة T ، ومن ثم فإن $u_0 = u(M_0) \geq u(M)$ حيث M أية نقطة فى المنطقة T . نحيط النقطة M_0 بسطح كروى Σ_ρ نصف قطره ρ ويقع بأكمله داخل المنطقة T . وحيث إن $u(M_0)$ هى حسب الفرض أكبر قيمة للدالة $u(M)$ فى $T + \Sigma$ فإن $u|_{\Sigma} \leq u(M_0)$. وبلاستعانة بنظرية القيمة المتوسطة (14) ووضع $u(M_0)$ بدلاً من $u(M)$ تحت علامة التكامل نحصل على :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\Sigma_\rho} u(M) d\sigma_M \leq \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\Sigma_\rho} u(M_0) d\sigma = u(M_0). \quad (16)$$

وإذا افترضنا أنه $u(M) < u(M_0)$ ولو فى نقطة واحدة M من نقط السطح الكروى Σ_ρ فن الواضح أنه سيكون لدينا العلامة $<$ بدلاً من العلامة \leq مما

يؤدي إلى تناقض . وبذلك فعلى كل السطح Σ يكون $u(M) = u(M_0)$.

وإذا كانت $\rho_0^{(m)}$ هي أصغر بعد من M_0 إلى السطح Σ فإن $u(M) = u(M_0)$ لجميع النقط الواقعة داخل $\Sigma_{\rho_0^{(m)}}$. ومن هنا يتبع أنه في النقط M^* المنتمية إلى الأجزاء المشتركة بين Σ و $\Sigma_{\rho_0^{(m)}}$ يكون وفقاً للاتصال $u(M^*) = u(M_0)$. وهنا يثبت النظرية نظراً لأننا تأكدنا أن القيمة العظمى $u(M_0)$ تصلها الدالة في نقط الحدود M^* .



شكل ٤٦

وليس من الصعب التأكد من أنه إذا كانت المنطقة T منطقة متصلة وكانت الدالة تصل إلى قيمتها العظمى ولو في نقطة واحدة داخلية M_0 فإن $u(M) = u(M_0)$ في كل المنطقة . نفرض أن $M^{(m)}$ نقطة ما أخرى من نقط المنطقة T . نوصل النقطة $M^{(m)}$ بالنقطة M_0 بالخط المنكسر L (شكل ٤٦) الذي نرمز لطوله بالحرف l . نفرض أن M_1 هي النقطة الأخيرة لمخرج L من $\Sigma_{\rho_0^{(m)}}$. وفي هذه النقطة $u(M_1) = u(M_0)$. نرسم حول هذه النقطة سطحاً كروياً $\Sigma_{\rho_1^{(m)}}$ نصف قطره $\rho_1^{(m)}$ (مركزه في M_1) ونفرض أن M_2 هي آخر نقطة لمخرج L من $\Sigma_{\rho_1^{(m)}}$. وفي هذه النقطة $u(M_2) = u(M_0)$. وبالاتسار في هذه العملية نحصل على أنه ليس بعد أكثر من $p = l/\rho^{(m)}$ خطوة ، حيث $\rho^{(m)}$ أصغر بعد بين الخط L و Σ ، سيحيط أحد السطوح الكروية بالنقطة $M^{(m)}$ ومنها يتبع أن $u(M^{(m)}) = u(M_0)$. ووفقاً للطابع الاختياري للنقطة $M^{(m)}$ واتصال $u(M)$ في المنطقة المغلقة $T + \Sigma$ نستنتج أن $u(M) = u(M_0)$ في كل مكان بما

في ذلك نقط الحدود. وبذلك فن بين جميع الدوال التوافقية تصل الحالة الثابتة فقط إلى نهايتها العظمى في النقط الداخلية للمنطقة.

ويمكن إثبات نظرية مماثلة للقيمة الصغرى.

نتيجة ١. إذا كانت الدالتان U , u متصلتين في المنطقة $T + \Sigma$ وتوافقيتين في T وكان

$$u \leq U \text{ على } \Sigma ,$$

فإن

$$u \leq U \text{ في كل مكان داخل } T.$$

بالفعل فالدالة $U - u$ متصلة في $T + \Sigma$ وتوافقية في T و

$$U - u \geq 0 \text{ على } \Sigma .$$

ووفقاً لمبدأ القيمة العظمى يكون

$$U - u \geq 0 \text{ في كل مكان داخل } T ,$$

ومن هنا تنتج صحة منطوقنا.

نتيجة ٢. إذا كانت الدالتان U , u متصلتين في المنطقة $T + \Sigma$ وتوافقيتين في T وكان

$$|u| \leq U \text{ على } \Sigma ,$$

فإن

$$|u| \leq U \text{ في كل مكان داخل } T.$$

ومن شروط النظرية ينتج أن الدوال التوافقية الثلاث $(U, u, -U)$ تحقق الشروط

$$-U \leq u \leq U \text{ على } \Sigma .$$

ويتطبيق النتيجة ١ مرتين نحصل على :

$$-U \leq u \leq U \text{ في كل مكان داخل } T .$$

$$|u| \leq U \text{ داخل } T.$$

نتيجة ٣. للدالة $u(M)$ التوافقية في T والمتصلة في $T + \Sigma$ تتحقق المتباينة $|u| \leq \max |u|_z$ في كل مكان داخل T . ولإثبات ذلك نضع $U = \max |u|_z$ ونستعين بالنتيجة ٢.

ورغم أن الشرح ورد لحالة الفراغ الثلاثي الأبعاد إلا أن النتائج تعمم على حالة الدوال التوافقية في أي عدد من المتغيرات.

فقرة ٣ : وحدانية واستقرار المسألة الحدية الأولى. نفرض أنه معطاة المنطقة T المحدودة بالسطح المغلق Σ المعطى عليه حالة ما f . وفي الحالة المبسطة عندما تكون الدالة الحدية f متصلة تصاغ عادة المسألة الحدية الداخلية الأولى (مسألة ديريشليت الداخلية) لمعادلة لابلاس على الوجه التالي :

المطلوب تعيين الدالة u التي

(أ) تكون معرفة ومتصلة في المنطقة المغلقة $T + \Sigma$ بما في ذلك الحدود؛

(ب) تحقق داخل المنطقة T المعادلة $\Delta u = 0$ ؛

(ج) تأخذ على حدود Σ قيم f المعطاة.

وفي الشرط (أ) يفترض توافقية الدالة داخل المنطقة T . وطلب التوافقية على الحدود يعتبر مطلباً زائداً عن الحاجة لأنه كان سيؤدي إلى تقييد إضافي للقيم الحدية.

وشرط اتصال u في المنطقة المغلقة (أو أي شرط آخر يوضح معنى أن الدالة u تأخذ على الحدود القيم المعطاة) هو شرط ضروري لوحداية الحل. وإذا رفضنا هذا الشرط فإن أية حالة مساوية للثابت C داخل T وللدالة المعطاة f على Σ يمكن اعتبارها حلاً للمسألة لأنها تحقق الشرطين (ب) ، (ج).

ثبتت نظرية الوحداية :

المسألة الحدية الداخلية الأولى لمعادلة لابلاس لا يمكن أن يكون لها حلان مختلفان.

نفرض أنه توجد دالتان مختلفتان u_1, u_2 تعتبران حلين للمسألة أى أنها دالتان متصلتان في المنطقة المغلقة $T + \Sigma$ تحققان داخل المنطقة معادلة لابلاس وتأخذان على السطح Σ نفس قيم الدالة f . والفرق بين الدالتين $u = u_1 - u_2$ له الخواص التالية :

$$1 - \Delta u = 0 \text{ داخل المنطقة } T$$

$$2 - u \text{ دالة متصلة في المنطقة المغلقة } T + \Sigma$$

$$3 - u|_{\Sigma} = 0$$

وهكذا فالدالة $u(M)$ متصلة وتوافقية في المنطقة T وتساوى الصفر على الحدود. وكما هو معلوم فإن أية دالة متصلة تصل في المنطقة المغلقة إلى قيمتها العظمى. ولتأكد من أن $u \equiv 0$. إذا كانت الدالة $u \neq 0$ وكانت ولو في نقطة واحدة $u > 0$. فإنها يجب أن تصل إلى قيمتها العظمى الموجبة داخل المنطقة وهو ما لا يمكن حدوثه. وبالمثل تماماً نثبت أن الدالة u لا يمكن أن تأخذ داخل T قيمة سالبة. ومن هنا ينتج أن

$$u \equiv 0.$$

وننتقل الآن إلى إثبات الاعتماد المتصل لحل المسألة الحدية الأولى على المعطيات الحدية. ونذكر القارئ بأن المسألة تسمى بالمسألة المحددة فيزيائياً إذا كان التغير الصغير في الشروط التي تحدد الحل ، وهي في حالتنا الشروط الحدية ، يناظره تغير صغير في الحل نفسه.

نفرض أن u_1, u_2 دالتان متصلتان في $T + \Sigma$ وتوافقيتان داخل T وتحقق لهما المتباينة $\epsilon \leq |u_1 - u_2|$ على Σ . عندئذ تحقق هذه المتباينة داخل T .

وهذه الحقيقة تنتج مباشرة من النتيجة ٢ صفحة ٣٤٨ ، وذلك نظراً لأن $U \equiv \epsilon$ تعتبر دالة توافقية.

وبذلك أثبتنا الاعتماد المتصل للحل على الشروط الحدية ووحداية المسألة الحدية الداخلية الأولى.

فقرة ٤ : المسائل ذات الشروط الحدية المنفصلة . كثيرا ما تقابلنا أيضا المسألة الحدية الأولى بشروط حدية منفصلة . والدالة المتصلة في المنطقة المغلقة لا يمكن أن تكون حلاً لهذه المسألة . ولذا فإنه يلزم تدقيقاً لصياغة المسألة الحدية الأولى أن نأخذ في الاعتبار هذه الحالة محل البحث .

نفرض أنه على المنحنى C الذى يحده المنطقة S فى المستوى (x, y) معطاة دالة متقطعة الاتصال $f(P)$. والمطلوب تعيين الدالة $u(M)$: (١) التوافقية داخل المنطقة S ، (٢) التى تؤول باتصال إلى القيم الحدية فى نقط اتصال الأخيرة ، (٣) المحدودة فى المنطقة المغلقة $S + C$. ونشير إلى أن المطلب الإضافى للتحديد يتعلق عملياً بجوارات نقط انفصال الدالة $f(P)$.

نثبت النظرية التالية :

حل المسألة الحدية الأولى بالقيم الحدية المتقطعة الاتصال هو حل وحيد .

نفرض أن u_1, u_2 حلان للمسألة المصاغة . والفرق

$$v = u_1 - u_2$$

١ - يكون دالة توافقية داخل S ؛

٢ - يؤول باتصال إلى القيم الحدية الصفرية على الحدود فيما عدا نقط انفصال $f(P)$ حيث يمكن أن يكون لهذا الفرق انفصالات ؛

٣ - يكون محدوداً $S + C$: $|v| < A$.

نكون الدالة التوافقية التالية :

$$U(M) = \varepsilon \sum_{i=1}^n \ln \frac{D}{r_i} .$$

حيث ε عدد اختيارى موجب ، D قطر المنطقة ، r_i بعد النقطة M محل الدراسة عن نقطة الانفصال P_i رقم i . الدالة $U(M)$ موجبة لأن كل الحدود أكبر من الصفر .

نرسم في كل نقطة انفصال P_i دائرة K_i نصف قطرها δ باختيار δ بحيث يكون كل حد

$$\varepsilon \ln \frac{D}{r_i}$$

على محيط الدائرة المناظرة C_i أكبر (أو يساوي) من أي A أي بحيث يكون $\varepsilon \ln \frac{D}{\delta} \geq A$ والدالة v متصلة في المنطقة المغلقة $S - \sum_{i=1}^n K_i = S'$ و $|v| \leq U$ على حدود هذه المنطقة.

ولنا فوقاً لمبدأ القيمة العظمى تكون U حداً أعظم (majorant) للدالة v :

$$|v(M)| \leq U(M).$$

وبتثبيت نقطة اختيارية M من المنطقة S وجعل $\varepsilon \rightarrow 0$ نحصل على:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(M) = 0;$$

وبالتالي

$$v(M) = 0$$

لأن v لا تعتمد على ε أو

$$u_1 = u_2,$$

وهو المطلوب إثباته.

فقرة ٥ : النقاط المنفردة المعزولة (isolated singular points). ندرس النقاط المنفردة للدالة التوافقية. نفرض أن P هي نقطة منفردة معزولة تقع داخل منطقة توافقية الدالة u . وتوجد حالتان محتملتان:

١ - الدالة التوافقية محدودة في جوار النقطة P ،

٢ - الدالة التوافقية ليست محدودة في جوار النقطة P . وقد قابلنا فيما سبق لنقط المنفردة من النوع الثاني (على سبيل المثال $\ln(1/r)$). وتبين النظرية التالية أن النوع الأول من النقاط المنفردة لا يمكن تحقيقه.

إذا كانت الدالة المحدودة $u(M)$ توافقية داخل المنطقة S فيما عدا النقطة P فإنه يمكن تعريف $u(P)$ بحيث تكون الدالة $u(M)$ توافقية في كل مكان داخل S .

نأخذ دائرة K_α نصف قطرها α ومركزها في النقطة p ، وتقع بأكملها داخل S ، وندرس داخلها الدالة التوافقية v التي تنطبق على الدالة u على محيط C_α - محيط الدائرة K_α *.

نكون الفرق

$$w = u - v,$$

الذي يكون :

١ - توافقياً في كل مكان داخل K_α عدا النقطة P حيث لا يكون w معرفاً ؛

٢ - يؤول باتصال إلى الشروط الحدية الصفرية على C_α ؛

٣ - محدوداً في المنطقة المغلقة $K_\alpha + C_\alpha (|w| < A)$.

وبالمثل كما في إثبات النظرية السابقة (فقرة ٤) ، نكون الدالة التوافقية غير السالبة

$$U(M) = e \ln \frac{\alpha}{r}.$$

وهنا e عدد اختياري موجب ، α نصف قطر الدائرة K_α ، r بعد النقطة M محل الدراسة عن نقطة الانفصال P .

نرسم دائرة K_0 مركزها في النقطة P باختيار نصف قطرها δ بحيث تكون قيمة U على محيط هذه الدائرة أكبر (أو تساوى) A وندرس المنطقة $K_\alpha - K_0$ والدالة w متصلة في المنطقة المغلقة $\delta \leq r \leq \alpha$ ، وعلى حدود هذه المنطقة تتحقق المتباينة $|w| \leq U$ ، ووفقاً لمبدأ القيمة العظمى تعتبر الدالة غير السالبة U حداً أعظم (majorant) للدالة w :

$$|w| \leq U(M) \text{ في المنطقة } \delta \leq r \leq \alpha.$$

* سيتم إثبات وجود مثل هذه الدالة في بند ٣ ولا تؤسس طريقة تكوينها على النظرية الحالية.

وبشيت نقطة اختيارية M من المنطقة K_α وغير منطبقة على P والانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ نحصل على :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(M) = 0,$$

وبالتالي ففي كل مكان ، ربما فيما عدا النقطة P ، يكون

$$w = 0$$

وبذلك فالدالة u في كل مكان في المنطقة S فيما عدا النقطة P تنطبق على الدالة v . وبفرض أن $u(P) = v(P)$ نحصل على الدالة $u = v$ التوافقية في كل مكان داخل المنطقة S . وبذلك نكون قد أثبتنا النظرية .

وبالمثل يتم إثبات النظرية لحالة الفراغ الثلاثي الأبعاد حيث يمكن أن تؤخذ الدالة $U(M) = \varepsilon \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)$ بمثابة الدالة - الحد الأعظم .

لقد افترضنا عند إثبات نظريات هذه الفقرة أن الدالة u محدودة في جوار النقطة P . غير أن نفس هذه التحليلات تحفظ بصحتها إذا ما افترضنا أن الدالة u في جوار النقطة P تحقق المتباينة

$$|u(M)| < \varepsilon(r) \log \frac{1}{r_{PM}}, \quad (17)$$

حيث $\varepsilon(r)$ دالة اختيارية تتوّل إلى الصفر عندما $r \rightarrow 0$ ، أى أنه في جوار النقطة P تتزايد الدالة $u(M)$ أبطأ من $\log(1/r_{PM})$.

ومكنا إذا كانت الدالة $u(M)$ دالة توافقية داخل المنطقة S فيما عدا النقطة P حيث تتزايد في جوار هذه النقطة P أبطأ من $\log(1/r_{MP})$ عندما $M \rightarrow P$ ، فإن هذه الدالة تكون محدودة في جوار النقطة P ، ويمكن تعيين قيمة $u(P)$ بحيث تكون الدالة u دالة توافقية في كل المنطقة S .

وبالمثل في حالة المتغيرات الثلاثة المستقلة : إذا كانت الدالة التوافقية $u(M)$ في جوار النقطة المنفردة المعزولة P تتزايد أبطأ من $1/r$ ،

$$|u(M)| < \varepsilon(r) \frac{1}{r_{MP}} \left(\begin{matrix} \varepsilon(r) \rightarrow 0 \\ r \rightarrow 0 \end{matrix} \right), \quad (18)$$

فإنها تكون محدودة في جوار هذه النقطة ويمكن تعيين قيمة $u(P)$ بحيث تكون الدالة $u(M)$ توافقية في النقطة P أيضا.

فقرة ٦ : انتظام الدالة التوافقية في ثلاثة متغيرات في الملائمانية. الدالة التوافقية في ثلاثة متغيرات $u(x, y, z)$ تسمى حالة منتظمة (regular) في الملائمانية إذا كان

$$|u| < \frac{A}{r}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| < \frac{A}{r^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| < \frac{A}{r^2}, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| < \frac{A}{r^2} \quad (19)$$

عند قيم r الكبيرة كبرا كافيا $r \geq r_0$.

نثبت أنه إذا كانت الدالة $u(x, y, z)$ توافقية خارج سطح ما مغلق Σ وتؤول بانتظام إلى الصفر في الملائمانية فإنها تكون منتظمة (regular) في الملائمانية.

وشرط التقارب المنتظم إلى الصفر في الملائمانية يعني أنه توجد تلك الدالة $s^*(r)$ بحيث إن

$$|u(M)| < s^*(r) \quad (s^*(r) \rightarrow 0 \text{ عندما } r \rightarrow \infty) \quad (20)$$

حيث r متجه موضع النقطة M .

وبإجراء تحويل كلفن

$$v(r', \theta, \varphi) = ru(r, \theta, \varphi),$$

حيث

$$r' = \frac{1}{r},$$

نجد أن الدالة v توافقية في كل مكان داخل السطح Σ ، الذي يتحول إليه السطح Σ عند تحويل مقبولات متجهات الموضع ، فيما عدا نقطة الأصل حيث يكون لهذه الدالة نقطة مفردة معزولة.

ومن الشرط (20) يتبع أنه في جوار نقطة الأصل تتحقق للدالة v المتباينة

$$|v(r', \theta, \varphi)| \leq s^*\left(\frac{1}{r'}\right) \frac{1}{r'} = s(r) \frac{1}{r},$$

حيث

$$\varepsilon(r') = \varepsilon^0 \left(\frac{1}{r'} \right) \rightarrow 0 \text{ عندما } r' \rightarrow 0$$

وعلى أساس النظرية الأخيرة من فقرة ٥ تكون $v(r', \theta, \varphi)$ حالة محدودة وتوافقية عندما $r' \leq r_0$:

$$|v(r', \theta, \varphi)| \leq A \text{ عندما } r' \leq r_0, \quad (21)$$

ومن هنا يتبع أن

$$|u(r, \theta, \varphi)| = \frac{|v(r', \theta, \varphi)|}{r} \leq \frac{A}{r} \text{ عندما } r \geq r_0 = \frac{1}{r_0}$$

ووفقا لتوافقية الحالة v عند $r' = 0$ يمكننا أن نكتب :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \cdot v(x', y', z') \right) = \\ &= -\frac{x}{r^3} \cdot v + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial x} \right], \quad (22) \end{aligned}$$

حيث

$$x' = \frac{x}{r} r', \quad y' = \frac{y}{r} r', \quad z' = \frac{z}{r} r'.$$

ومن هنا بحساب المشتقات $\frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial y'}{\partial x}, \frac{\partial z'}{\partial x}$ والأخذ في الاعتبار محدودية المشتقات الأولى للحالة v في جوار النقطة $r' = 0$ نحصل على :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq \frac{A}{r^2} \text{ عندما } r \rightarrow \infty$$

وتكون التقديرات المماثلة صحيحة أيضا للمشتقتين $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

فقرة ٧ : المسائل الحدية الخارجية. وحدانية الحل للمسائل الثلاثية والثلاثية الأبعاد. تختلف صياغة المسائل الحدية الخارجية في حالة المتغيرين المستقلين عنها في حالة المتغيرات الثلاثة المستقلة.

ندرس في البداية حالة المتغيرات الثلاثة. نفرض أن T هي المنطقة الخارجية بالنسبة إلى سطح ما مغلق Σ .

المسألة الحدية الخارجية الأولى (مسألة ديريشليت الخارجية) تنحصر في

الآتي :

المطلوب تعيين الدالة $u(x, y, z)$ التي تحقق الشروط :

$$1 - \Delta u = 0 \text{ في المنطقة اللاحدودة } T$$

$$2 - u \text{ متصلة في كل مكان بما في ذلك السطح } \Sigma$$

$$3 - u|_{\Sigma} = f(x, y, z) \text{ حيث } f \text{ دالة معطاة على السطح } \Sigma$$

$$4 - u(M) \rightarrow 0 \text{ عندما } M \rightarrow \infty$$

والشرط الأخير يعتبر شرطاً جوهرياً لوحداية الحل وذلك يمكن التأكد منه على مثال بسيط . نفرض أن المطلوب حل المسألة الحدية الخارجية الأولى للسطح الكروي S_R الذي نصف قطره R بالشرط الحدى الثابت

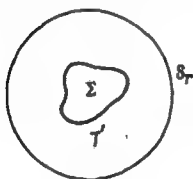
$$u|_{S_R} = \text{const} = f_0.$$

ويإهمال الشرط (٤) نرى أن حلول المسألة يمكن أن تكون الدالتان $u_1 = f_0$, $u_2 = f_0 \frac{R}{r}$ وكذلك أية دالة

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2 \text{ حيث } \alpha + \beta = 1$$

نثبت أن

المسألة الحدية الخارجية الأولى للدوال التوافقية في متغيرات ثلاثة مستقلة لها



شكل ٤٧

حل وحيد . بفرض وجود حلين u_1 , u_2 يحققان الشروط (١) - (٤) نرى أن الفرق $u = u_1 - u_2$ هو عبارة عن حل للمسألة بالشروط الحدية الصفرية . وحيث إن الشرط (٤) يتحقق أيضاً للدالة u فإنه لأى $\epsilon > 0$ يمكن تعيين R^* بحيث إن

$$|u(M)| < \epsilon \text{ عندما } r \geq R^*$$

وإذا كانت النقطة M تقع داخل المنطقة T (شكل ٤٧) المحصورة داخل السطح Σ والسطح الكروي S_r ($r \geq R^*$) فإن $|u(M)| < \epsilon$ كما ينتج من مبدأ القيمة العظمى مطبقاً على المنطقة T . ووفقاً للطابع الاختياري للبارامتر ϵ

نستنتج أن $u \equiv 0$ في المنطقة T' وكذلك في كل المنطقة T مما يثبت وحدانية حل
المسألة الحدية الأولى الخارجية في الفراغ .

المسألة الحدية الخارجية الأولى في المستوى تصاغ على الوجه التالي :
المطلوب تعيين الدالة u التي تحقق الشروط :

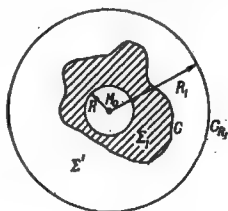
- ١ - $\Delta u = 0$ في المنطقة اللانهائية Σ المحدودة بالمنحنى C ؛
- ٢ - الدالة u متصلة في كل مكان بما في ذلك على C ؛
- ٣ - $u|_C = f(x, y)$ حيث f دالة معطاة على C ؛
- ٤ - $u(M)$ محدودة في المالا نهاية أى يوجد ذلك العدد N بحيث يكون
 $|u(M)| \leq N$.

ويتضح أن مطلب أن يؤول الحل إلى الصفر في المالا نهاية يعتبر هنا أيضا كافيا
لإثبات أنه لا يمكن وجود حلين مختلفين ، ولكن هذا المطلب يعتبر قويا للغاية لأن
المسألة به قد تصبح غير قابلة للحل عامة .

نثبت أن المسألة الحدية الخارجية الأولى للدالة في متغيرين لها حل وحيد .
بفرض وجود حلين مختلفين u_1 , u_2 وبدراسة الفرق بينهما $u = u_1 - u_2$
الذى يعتبر حلاً للمسألة الحدية بالشروط الحدية الصفرية سيكون لدينا وفقا للشرط
(٤) ما يلي :

$$|u| \leq N = N_1 + N_2$$

حيث N_1 , N_2 هما عددان بحيث إن $|u_1| \leq N_1$, $|u_2| \leq N_2$. نرمز بالرمز Σ_1
للمنطقة الواقعة داخل C والتي تعتبر مكحلة للمنطقة Σ بحيث يكون $\Sigma + \Sigma_1$ هى
كل المستوى . نأخذ النقطة M_0 داخل Σ_1
ودائرة نصف قطرها R ومركزها في النقطة
 M_0 تقع داخل Σ_1 (شكل ٤٨) .
والدالة التوافقية $\ln(1/R_{MM_0})$ ليس لها
نقط منفردة في المنطقة Σ ، والدالة
 $\ln(R_{MM_0}/R)$ موجبة في كل المنطقة Σ بما
في ذلك C . نفرض أن C_{R_1} محيط دائرة
نصف قطرها R_1 ومركزها في M_0 ، تحتوي



شكل ٤٨

كلية المنحنى C ، و Σ' المنطقة المحدودة بالمنحنيين C, C_{R_1} . الدالة u_{R_1} المعرفة بالتساوية

$$u_{R_1} = N \frac{\ln(R_{MM}/R)}{\ln(R_1/R)} \quad (23)$$

هى حالة توافقية تساوى N على محيط الدائرة التى نصف قطرها R_1 وموجبة على C ، ومن مبدأ القيمة العظمى ينتج أن u_{R_1} تكون حداً أعظم للقيمة المطلقة للدالة $u(M)$ فى المنطقة Σ ،

$$|u(M)| < u_{R_1}(M).$$

نثبت النقطة M ونجعل R_1 يتزايد بلا حدود . من الواضح أن $u_{R_1}(M) \rightarrow 0$ عندما $R_1 \rightarrow \infty$ ، ومن هنا ينتج أن

$$u(M) = 0.$$

وبذلك فوفقاً للطابع الاختيارى للنقطة M أثبتنا وحدانية حل المسألة المصاغة . ووحدانية حل هذه المسألة يمكن أيضاً إثباته بالاستعانة بتحويل مقبوليات متجهات الموضع الذى يحول المنطقة الخارجية بالنسبة إلى المنحنى C إلى منطقة داخلية بالنسبة إلى المنحنى C' الذى يتحول إليه المنحنى C .

وعند ذلك تتحول النقطة البعيدة بعداً لانهائياً إلى نقطة منفردة معزولة تكون الدالة v فى جوارها محدودة . ومن نظريات الفقرة ٥ نتج توافقية الدالة v فى نقطة الأصل ومن ثم وحدانية الحل .

ومن هذه التصورات الواردة ينتج أن الدالة التوافقية فى متغيرين $u(M)$ المحدودة فى المالا نهاية تؤول إلى نهاية معينة عندما تؤول M إلى المالا نهاية .

ويمكن توضيح الاختلاف فى صياغة المسألة الحدية الخارجة الأولى فى حالة المتغيرين والثلاثة متغيرات على المثال الفيزيائى التالى : نفرض أن لدينا كرة نصف قطرها R يحفظ على سطحها بدرجة حرارة u_0 ثابتة والمطلوب تعيين التوزيع المستقر لدرجة الحرارة فى الفراغ الخارجى . الدالة $u = u_0(R/r)$ تمثل حل المسألة الذى يؤول إلى الصفر فى المالا نهاية .

ندرس الآن المسألة الثانية الأبعاد ونفرض أنه على محيط دائرة نصف قطرها R معطاة القيمة الحدية الثابتة

$$u|_z = f_0 = \text{const.}$$

وفي هذه الحالة فإن $u \equiv f_0$ هو الحل المحدود الوحيد للمسألة ولا يوجد أى حل آخر يؤول إلى الصفر في المالا نهاية. وقد سبق أن قابلنا الطابع المختلف اختلافا جوهرياً بين سلوك الدوال التوافقية في المالا نهاية في حالتى المتغيرين والثلاثة متغيرات مستقلة (على سبيل المثال سلوك $1/r$ و $\ln 1/r$ في المالا نهاية).

والمناطق اللامحدودة الفراغية والمستوية يتحقق مبدأ القيمة العظمى. ولا يصعب التأكد من ذلك بواسطة إجراء تحليلات مماثلة لتلك التى استعنا بها عند إثبات نظريات الوحداية. ومن هنا يتج بدوره الاعتماد المتصل للحل على الشروط الحدية.

فقرة ٨ : المسألة الحدية الثانية. نظرية الوحداية. إن حل المسألة الحدية الثانية هو الدالة u المتصلة في $T + \Sigma$ والى تحقق على السطح Σ الشرط

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = f(M).$$

نثبت أن حل المسألة الحدية الداخلية الثانية (مسألة نيان الداخلية) يتحدد بدقة أقصاها ثابت اختيارى.

نجرى الإثبات بفرض إضافى هو أن الدالة u لها مشتقات أولى متصلة في المنطقة $T + \Sigma$.

نفرض أن u_1, u_2 دالتان قابلتان للتفاضل باتصال في $T + \Sigma$ تحققان المعادلة $\Delta u = 0$ في T والشرط $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = f(M)$ على Σ . للدالة $u = u_1 - u_2$ سنحصل على :

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0.$$

• الفرض للتعلق باتصال المشتقات الأولى في $T + \Sigma$ فرض لتبسيط الإثبات. وإثبات الوحداية بفرض أكثر عمومية قام به العلان السوفيتيان م. كلدش وم. لافريتييف عام ١٩٣٧.

وبوضع $v = u$ في علاقة جرين الأولى (3) والأخذ في الاعتبار العلاقتين

$$\Delta u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0$$

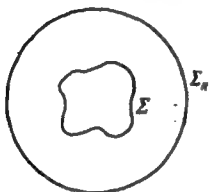
$$\iiint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 0.$$

ومن هنا ووفقا لاتصال الدالة u ومشتقاتها الأولى ينتج أن

$$u \equiv \text{const} \quad \text{أي أن} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

وهو المطلوب إثباته.

وطريقة الإثبات الواردة هنا يمكن تطبيقها أيضا في حالة المنطقة اللامحدودة للدوال التي تحقق شروط الانتظام في المالا نهاية.



شكل ٤٩

نوضح أنه في حالة المنطقة اللامحدودة الخارجية بالنسبة إلى السطح المغلق تكون علاقة جرين (3) قابلة للتطبيق على الدوال المنتظمة (regular) في المالا نهاية.

ندرس للمنطقة T الخارجية بالنسبة إلى السطح المغلق Σ . نأخذ سطحاً كروياً Σ_R ذا نصف قطر كبير بحيث يقع Σ داخل Σ_R . نرمز بالرمز T_R إلى المنطقة المحدودة

بالسطحين Σ_R , Σ (شكل ٤٩). وتطبيق علاقة جرين في المنطقة T_R على الدالتين u , v المنتظمتين في المالا نهاية نحصل على:

$$\begin{aligned} \iiint_{T_R} u \Delta v d\tau = - \iiint_{T_R} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] d\tau + \\ + \int_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma + \int_{\Sigma_R} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma. \quad (24) \end{aligned}$$

نقدر التكامل المأخوذ على Σ_R بالاستعانة بخاصية انتظام الدالتين u , v :

$$\left| \iint_{\Sigma_R} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \right| = \left| \iint_{\Sigma_R} u (v_x \cos \alpha + v_y \cos \beta + v_z \cos \gamma) d\sigma \right| \leq \\ \leq \left| \iint_{\Sigma_R} \frac{A}{R} \cdot \frac{3A}{R^2} d\sigma \right| \leq \frac{3A^2}{R^3} 4\pi R^2 = \frac{12\pi A^2}{R}.$$

ومن هنا نرى أن

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\Sigma_R} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0.$$

والتكامل في الطرف الايمن من (24) المأخوذ على T_R يؤول إلى التكامل المأخوذ على كل المنطقة T عندما $R \rightarrow \infty$. وهنا التكامل موجود لأن الصيغة المكاملة تتلاشى مثل $1/R^4$ في المالا نهاية وذلك نظرا لانتظام الدالتين u , v . وبالتالي توجد النهاية

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iiint_{T_R} u \Delta v d\tau = \iiint_T u \Delta v d\tau.$$

ونتيجة لذلك نوصول إلى العلاقة

$$\iiint_T u \Delta v d\tau = \\ = - \iiint_T \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] d\tau + \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma. \quad (25)$$

وبذلك أثبتنا قابلية تطبيق علاقة جرين الأولى ومن ثم الثانية للمناطق اللامحدودة على الدوال المنتظمة في المالا نهاية.

نبين الآن أن المسألة الحدية الخارجية الثانية (مسألة نيان الخارجية) لها حل وحيد منتظم في المالا نهاية:

بوضع $v = u = u_1 - u_2$ في العلاقة (25) والأخذ في الاعتبار أن $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0$, $\Delta u = 0$ نحصل على:

$$\iiint_T (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) d\tau = 0.$$

ومن هنا ووفقاً لاتصال مشتقات الدالة u ينتج أن

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0, \quad u = \text{const.}$$

وحيث إن $u = 0$ في المالا نهاية فإن

$$u_1 = u_2 = u = 0$$

وهو المطلوب إثباته .

ومن الطبيعي أن ينشأ هنا سؤال : هل يمكن إثبات وحداية حل المسألة الحدية الأولى بهذه الطريقة أيضاً ؟

نفرض أن u_1, u_2 حلان مختلفان للمسألة الحدية الأولى (الداخلية) . نطبق العلاقة (3) على الدالتين $u = u_1 - u_2$ و $v = u$ في المنطقة T المحدودة بالسطح Σ :

$$\iiint_T u \Delta u \, d\tau = - \iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \, d\tau + \iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma.$$

ومن هنا وبأخذ الشروط

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\Sigma} = 0$$

في الاعتبار نحصل على :

$$\iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \, d\tau = 0$$

وبالتالى

$$u_x = u_y = u_z = 0, \quad u = \text{const.}$$

وعلى السطح Σ الدالة u تساوى الصفر ولذا يمكننا أن نؤكد أن

$$u_1 = u_2, \quad u = 0$$

غير أن هذا الإثبات غير دقيق لأنه خلال عملية الإثبات افترضنا وجود مشتقات الدالة المجهولة على السطح Σ وهو ما لا تنص عليه صياغة المسألة . ويحلو إثبات الوحداية المؤسس على مبدأ القيمة العظمى من هذا العيب .

بند ٣ - حل المسائل الحدية للمناطق البسيطة

بطريقة فصل المتغيرات

يمكن تعيين حل المسائل الحدية لمعادلات لابلاس بواسطة طريقة فصل المتغيرات في حالة بعض المناطق البسيطة (دائرة ، مستطيل ، كرة ، اسطوانة وغيرها) . ومسائل القيم النهائية الناتجة عند ذلك (مسائل شتورم - ليوفيل) تؤدي إلى فصول مختلفة من الدوال الخاصة . وفي هذا البند سندرس مسائل ديريشليت (الداخلية والخارجية) التي يستعان عند حلها بالدوال المثلثية فقط . وفيما بعد ، عند دراسة الدوال الخاصة ، سندرس مسائل ديريشليت للكرة والاسطوانة .

فقرة ١ : المسألة الحدية الأولى للدائرة . نحل المسألة الحدية الأولى للدائرة :

عين الدالة u التي تحقق المعادلة :

$$\Delta u = 0 \quad \text{داخل الدائرة} \quad (1)$$

والشرط الحدى

$$u = f \quad \text{على حدود الدائرة (على المحيط)} \quad (2)$$

حيث f دالة معطاة .

سنفرض أولاً أن الدالة f متصلة وقابلة للتفاضل وأن الحل $u(M)$ متصل في المنطقة المغلقة . وفيما بعد سنترك شروط القابلية للتفاضل وحتى اتصال الدالة f (قارن مع فقرة ٤ ، بند ٢) . وبالإضافة إلى المسألة الحدية الداخلية سندرس أيضاً المسألة الحدية الخارجية (انظر بند ٢ ، فقرة ٧) .

ندرج مجموعة قطبية للإحداثيات (ρ, φ) نقطة أصلها في مركز الدائرة . والمعادلة (1) في الإحداثيات القطبية تكون على الصورة :

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (3)$$

(انظر العلاقة (34) بند ١) . سنحل المسألة بطريقة فصل المتغيرات أى سنبحث عن الحل الخاص للمعادلة (1) في الصورة

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho) \Phi(\varphi) \neq 0.$$

بالتعويض بالصورة المقترحة للحل في المعادلة (3) نحصل على

$$\frac{\frac{d}{dp} \left(\rho \frac{dR}{dp} \right)}{\frac{R}{\rho}} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda,$$

حيث $\lambda = \text{const}$. ومن هنا نحصل على المعادلتين :

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi \neq 0, \quad (4)$$

$$\rho \frac{d}{dp} \left(\rho \frac{dR}{dp} \right) - \lambda R = 0, \quad R \neq 0. \quad (5)$$

والمعادلة الأولى من هاتين المعادلتين تعطينا :

$$\Phi(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda} \varphi + B \sin \sqrt{\lambda} \varphi.$$

ونشير إلى أنه عند تغير الزاوية φ بمقدار 2π يجب أن تعود الدالة إلى القيمة $u(\rho, \varphi)$ إلى قيمتها الأصلية

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi)$$

(شرط الدورية). ومن هنا ينتج أن $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ ، أى أن $\Phi(\varphi)$ تعتبر دالة دورية في الزاوية φ بفترة دورة 2π . وهذا يكون ممكناً فقط إذا كان $\sqrt{\lambda} = n$ حيث n عدد صحيح و

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi.$$

والدالة $R(\rho)$ سنبحث عنها في الصورة $R(\rho) = \rho^\mu$. بالتعويض في المعادلة

(5) واختصار ρ^μ نجد أن

$$(n > 0) \quad \mu = \pm n \quad \text{أو} \quad n^2 = \mu^2$$

وبالتالى

$$R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n},$$

حيث C, D ثابتان.

ولحل المسألة الداخلية يجب أن نضع $R = C\rho^n$ ($\mu = n$) وذلك لأنه إذا كان $D \neq 0$ فإن الدالة $u = R(\rho)\Phi(\varphi)$ تتحول إلى المالا نهاية عند $\rho = 0$ ولا تعتبر دالة توافقية داخل النائرة. ولحل المسألة الخارجية يجب على العكس أن نأخذ

في المالا نهاية . $R = D\rho^{-n}$ ، لأن حل المسألة الخارجية يجب أن يكون محدوداً

وهكذا فالحلول الخاصة لمسألتنا قد عينت * :

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad , \quad \rho \leq a,$$

$$u_n(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad , \quad \rho \geq a.$$

وبمجموعاً هذه الحلول

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad \text{للمسألة الداخلية}$$

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad \text{للمسألة الخارجية}$$

يكونان عند التقارب الجيد بدرجة كافية دالتين توافقيتين أيضاً .

ولتعيين المعاملات A_n , B_n نستعين بالشروط الحدية

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f. \quad (6)$$

وباعتبار أن f معطاة كدالة في الزاوية φ نأخذ مفكوكها في متسلسلة فورييه

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \quad (7)$$

• نفقد صيغة مؤثر لا بلاس في الإحداثيات القطبية (3) مناماً عند $\rho = 0$. ثبت أن $\Delta u_n = 0$ أيضاً

عندما $\rho = 0$. ولإثبات ذلك لن نستعين الآن بمجموعة الإحداثيات القطبية ، فننتقل إلى الإحداثيات

الكرتيزية . الحلول الخاصة

$$\rho^n \cos n\varphi \quad \text{و} \quad \rho^n \sin n\varphi$$

يوصفها الجزئين الحقيقي والتخيلي للدالة

$$\rho^n e^{in\varphi} = (\rho e^{i\varphi})^n = (x + iy)^n,$$

تعتبر كميات حدود في x و y . ومن الواضح أن كثيرة الحدود التي تحقق معادلة لا بلاس $\Delta u = 0$ عندما $\rho > 0$ تحقق هذه للمادة وفقاً لاتصال المشتقات الثانية عندما $\rho = 0$ أيضاً .

حيث

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

وبمقارنة المتسلسلتين (6) ، (7) نحصل على :

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \quad B_n = \frac{\beta_n}{a^n} \quad \text{للمسألة الداخلية}$$

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \alpha_n a^n, \quad B_n = a^n \beta_n \quad \text{للمسألة الخارجية}$$

وبذلك حصلنا على الحل الشكلي للمسألة الحدية الداخلية للدائرة في صورته متسلسلة :

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \quad (8)$$

وعلى حل المسألة الخارجية في الصورة :

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \quad (9)$$

وللتأكد من أن الدوال الناتجة هي بالفعل الحلول المطلوبة يجب التأكد من قابلية تطبيق مبدأ التراكب ، ولهذا الغرض يجب إثبات تقارب المتسلسلات وإمكانية تفاضلها حدًا حدًا وكذلك إثبات اتصال هذه الدوال على حدود الدائرة . وكلتا المتسلسلتين يمكن التعبير عنها بعلاقة واحدة :

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) + \frac{\alpha_0}{2},$$

حيث

$$t = \begin{cases} \frac{\rho}{a} \leq 1 & (\rho \leq a) \text{ للمسألة الداخلية} \\ \frac{a}{\rho} \leq 1 & (\rho \geq a) \text{ للمسألة الخارجية} \end{cases}$$

و α_n, β_n معاملات فورييه للدالة $f(\varphi)$.

نثبت أن المتسلسلتين (9), (8) يمكن تفاضلهما عندما $t < 1$ أى عدد من المرات. نفرض أن

$$u_n = t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

نحسب المشتقة رقم k للدالة u_n بالنسبة إلى φ

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} = t^n n^k \left[\alpha_n \cos \left(n\varphi + k \frac{\pi}{2} \right) + \beta_n \sin \left(n\varphi + k \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

ومن هنا نحصل على التقدير

$$\left| \frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} \right| \leq t^n n^k 2M,$$

حيث رمزنا بالحرف M إلى النهاية العظمى للقيمة المطلقة لمعاملات فورييه α_n, β_n :

$$|\alpha_n| < M, \quad |\beta_n| < M. \quad (10)$$

وبتثبيت قيمة معينة $\rho_0 < a$ (للمسألة الداخلية) أو $\rho_1 = a^2/\rho_0 > a$ (للمسألة الخارجية) ، وعند ذلك يكون $t_0 = \rho_0/a < 1$ ، ندرس المتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n n^k (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq 2M \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n n^k \quad (t \leq t_0),$$

فترى أنها تتقارب بانتظام عند $t \leq t_0 < 1$ لأى k . ولنا يمكن تفاضل المتسلسلتين (9), (8) بالنسبة إلى φ فى أية نقطة داخل (أو خارج) الدائرة أى عدد من المرات. وبالمثل يتم إثبات أنه يمكن أيضاً تفاضل المتسلسلتين (8), (9) بالنسبة إلى ρ داخل (خارج) الدائرة التى نصف قطرها $a < \rho_0$ ($\rho_1 > a$) أى عدد مطلوب من المرات.

ووفقاً للطابع الاختيارى للقيمة ρ_0 نستنتج أن المتسلسلتين (9), (8) قابلتان للتفاضل حداً حداً فى كل نقطة داخلية (خارجية) من نقط الدائرة. ومن إمكانية

التفاضل حداً حداً نتج قابلية تطبيق مبدأ التراكب . وبذلك أثبتنا أن الدالتين (8) ، (9) تحققان المعادلة $\Delta u = 0$.

وفي هذا الإثبات استعنا فقط بخاصية الدالة $f(\varphi)$ التي تنحصر في أن معاملات فورييه لها محدودة (العلاقة (10)) . ويتحقق هذا لأية دالة محدودة (وحتى لأية دالة قابلة للتكامل مطلقاً) . وبذلك فالتسلسلتين (9) ، (8) المناظرتين لأية دالة محدودة تعرفان دوال تحقق المعادلة

$$\Delta u = 0 \quad , \quad t < 1.$$

وسنستعين بهذه الملاحظة فيما بعد عند تعميم النتائج التي نحصل عليها في هذه الفقرة .

وننتقل الآن إلى إثبات اتصال الدالة في المنطقة المغلقة $(t \leq 1)$ ، ومن الواضح أنه لا يمكن إجراء ذلك بدون معلومات أكثر تفصيلاً عن خواص الدالة $f(\varphi)$.

من فرض اتصال وقابلية تفاضل الدالة $f(\varphi)$ يتج إمكانية تحليلها في متسلسلة فورييه وكذلك تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty. \quad (11)$$

ومن ناحية أخرى لدينا

$$|f^n \alpha_n \cos n\varphi| \leq |\alpha_n|, \quad |f^n \beta_n \sin n\varphi| \leq |\beta_n|.$$

ولذا فالتسلسلتين (9) ، (8) تتقاربان بانتظام عندما $t \leq 1$ ، وبالتالي فإن الدالتين الممثلتين بهما متصلتان على حدود الدائرة . ومن العلاقة (11) تنضح أن الدالة (9) الناتجة للمسألة الخارجية محدودة في المالا نهاية .

• وهذا للطرق يتحقق أيضاً عندما $p = 0$. بالفعل بالصير عن اللشقات بالإحداثيات الكرتيزية بدلالة اللشقات بالإحداثيات القطبية لا يصعب التأكد من أن الدالتين (9) ، (8) عند $t_0 \leq t$ يمكن تفاضلها بالنسبة إلى x, y أي عدد من المرات . ووفقاً للهامش السابق يتج من هذا أن

$$\Delta u = 0 \quad \text{عندما} \quad p = 0.$$

وبذلك أثبتنا أن المتسلسلتين (9) ، (8) تحققان كل شروط المسائل محل البحث .

فقرة ٢ : تكامل بواسون . نحول الآن العلاقتين (9) ، (8) إلى صورة أبسط .
للتحديد ندرس المسألة الداخلية ثم نكتب النتيجة للمسألة الخارجية بالمثل .

بالتعويض بصيغ معاملات فورييه في العلاقة (8) وتغيير ترتيب الجمع والتكامل سنحصل على :

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^n (\cos n\psi \cos n\varphi + \sin n\psi \sin n\varphi) \right\} d\psi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^n \cos n(\varphi - \psi) \right\} d\psi. \quad (12) \end{aligned}$$

نجرى التحويلات المتطابقة التالية :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n(\varphi - \psi) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} t^n [e^{in(\varphi - \psi)} + e^{-in(\varphi - \psi)}] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(te^{i(\varphi - \psi)})^n + (te^{-i(\varphi - \psi)})^n] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{te^{i(\varphi - \psi)}}{1 - te^{i(\varphi - \psi)}} + \frac{te^{-i(\varphi - \psi)}}{1 - te^{-i(\varphi - \psi)}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos(\varphi - \psi) + t^2} \quad \left(t = \frac{\rho}{a} < 1 \right). \end{aligned}$$

بالتعويض بهذه النتيجة في المساوية (12) نحصل على :

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi. \quad (13)$$

والعلاقة الناتجة التي تعطى حل المسألة الحدية الأولى داخل الدائرة تسمى بتكامل بواسون ، والصيغة المكاملة

$$K(\rho, \varphi, a, \psi) = \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + a^2}$$

تسمى بنواة بواسون . ونشير إلى أن $K(\rho, \varphi, a, \psi) > 0$ عندما $\rho < a$ وذلك لأن $2ap < a^2 + \rho^2$ إذا كان $\rho \neq a$.

وقد استنبط تكامل بواسون بفرض أن $\rho < a$ ، وعندما $\rho = a$ تفقد الصورة (13) معناها . إلا أن

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow a \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} u(\rho, \varphi) = f(\varphi_0),$$

وذلك لأن المتسلسلة التي حصلنا منها على تكامل بواسون تعتبر دالة متصلة في المنطقة المغلقة .

والدالة المعروفة بالعلاقة

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi & , \quad \rho < a, \\ f(\varphi) & , \quad \rho = a, \end{cases} \quad (13')$$

نحقق المعادلة $\Delta u = 0$ عندما $\rho < a$ وتكون متصلة في المنطقة المغلقة بما في ذلك المحيط $\rho = a$.

ومن الواضح أن حل المسألة الحدية الخارجية يكون على الصورة :

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi & , \quad \rho > a, \\ f(\varphi) & , \quad \rho = a. \end{cases} \quad (14)$$

وفي البداية افترضنا أن الدالة $f(\varphi)$ متصلة وقابلة للتفاضل ، وبلاستعانة بذلك أثبتنا أن حل المسألة يمكن التعبير عنه بمتسلسلة لانهاية . وبعد ذلك توصلنا بواسطة التحويلات المتطابقة من المتسلسلة إلى تكامل بواسون .

ثبت الآن أن تكامل بواسون يعطى حل المسألة الحدية الأولى أيضاً عندما تكون الدالة $f(\varphi)$ متصلة فقط .

إن تكامل بواسون يعبر عن حل معادلة لابلاس عندما $\rho < a$ ($t < 1$) لأية دالة اختيارية محدودة $f(\varphi)$. بالفعل فعندما $\rho < a$ ($t < 1$) يكون تكامل بواسون متطابقاً مع المتسلسلة (8) ووفقاً للملاحظة في صفحة ٣٦٩ يحقق المعادلة $\Delta u = 0$ لأية دالة اختيارية محدودة $f(\varphi)$.

وبذلك يتبقى علينا أن نثبت أن الدالة u في حالتنا تؤول باتصال إلى القيم الحدية . نختار متتابعة ما من الدوال المتصلة القابلة للتفاضل

$$f_1(\varphi), f_2(\varphi), \dots, f_k(\varphi), \dots,$$

تتقارب بانتظام إلى الدالة $f(\varphi)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\varphi) = f(\varphi).$$

ومتابعة الدوال الحدية ستناظرها متتابعة من الدوال التوافقية $u_k(\rho, \varphi)$ المعرفة بالعلاقة (13) أو (8) . والتقارب المنتظم للمتتابعة $\{f_k(\varphi)\}$ إنما يعنى أنه لأى عدد $\varepsilon > 0$ يمكن تعيين $k_0(\varepsilon) > 0$ بحيث إن

$$|f_k(\varphi) - f_{k+l}(\varphi)| < \varepsilon \quad \text{عندما } l > 0, k > k_0(\varepsilon).$$

والدوال $u_k(\rho, \varphi)$ التى تمثل حلول المسألة الحدية الأولى سنحصل وفقاً لمبدأ القيمة العظمى على :

$$|u_k(\rho, \varphi) - u_{k+l}(\rho, \varphi)| < \varepsilon$$

عندما $\rho \leq \rho_0$ إذا كان $k > k_0(\varepsilon)$ ، $l > 0$. وبذلك تتقارب المتتابعة $\{u_k\}$ بانتظام إلى دالة ما $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$. والدالة النهائية $u(\rho, \varphi)$ متصلة فى المنطقة المغلقة نظراً لأن كل الدوال u_k الممثلة بالتكاملات

$$u_k(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + a^2} f_k(\psi) d\psi,$$

هى دوال متصلة فى المنطقة المغلقة . ومن الواضح أن

$$u(\rho, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\rho, \varphi) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + \rho^2} f(\psi) d\psi & , \quad \rho < a, \\ f(\varphi) & , \quad \rho = a, \end{cases}$$

• لن نتوقف هنا عند كيفية تحقيق ذلك . فكل هذه الثانية يمكن اختيارها بطرق عديدة .

لك لأن المتابعة $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام إلى f ولنا يكون الانتقال إلى النهاية
ت علامة التكامل قانونياً .
وبذلك فالسالة

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + a^2} f(\psi) d\psi$$

لأية دالة اختيارية متصلة $f(\varphi)$ تكون حلاً لمعادلة لابلاس ويؤول باتصال إلى القيم
المعطاة على حدود الدائرة .

فقرة ٣ : حالة القيم الحدية المنفصلة . ثبت أن العلاقتين (13') ، (14)
تعطيان حل المسألة الحدية لأية دالة اختيارية متقطعة الاتصال $f(\varphi)$ أى أن هـ
الحل محدود في كل المنطقة ويؤول باتصال إلى القيم الحدية عند نقط اتصال الدالة
 $f(\varphi)$ ويكون بذلك هو الحل الوحيد الذى يتمتع بهذه الخاصية (قارن مع بند ٢ ،
فقرة ٤) . نفرض أن φ_0 هى نقطة ما من نقط اتصال الدالة $f(\varphi)$. ويجب إثبات
أنه مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0)| < \varepsilon, \quad \text{إذا كان}$$

$$|\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon) \text{ و } |\rho - a| < \delta(\varepsilon)$$

ووفقاً لاتصال الدالة $f(\varphi)$ يوجد $\delta_0(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|f(\varphi) - f(\varphi_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{إذا كان } |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon)$$

ندرس حالتين مساعدتين متصلتين وقابلتين للتفاضل $f(\varphi)$ ، $\overline{f(\varphi)}$ تحققان الشروط
التالية :

$$\text{عندما } |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon) \quad \overline{f(\varphi)} = f(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{عندما } |\varphi - \varphi_0| > \delta_0(\varepsilon) \quad \overline{f(\varphi)} \geq f(\varphi)$$

و

$$\text{عندما } |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon) \quad \underline{f(\varphi)} = f(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{عندما } |\varphi - \varphi_0| > \delta_0(\varepsilon) \quad \underline{f(\varphi)} \leq f(\varphi)$$

وفيما عدا ذلك تكون الدالتان هاتان اختياريتين . وإذا عينا بواسطة العلاقة (13) للدالتين \underline{f} , \bar{f} الدالتين $\underline{u}(\rho, \varphi)$, $\bar{u}(\rho, \varphi)$ فإنها ستكونان دالتين توافقيتين تؤولان باتصال إلى $\underline{f}(\varphi)$, $\bar{f}(\varphi)$.

ونظراً لأن نواة بواسون موجبة ، نحصل على

$$\underline{u}(\rho, \varphi) \leq u(\rho, \varphi) \leq \bar{u}(\rho, \varphi), \quad \text{وذلك لأن}$$

$$\underline{f}(\varphi) \leq f(\varphi) \leq \bar{f}(\varphi).$$

ومن اتصال الدالتين $\underline{u}(\rho, \varphi)$, $\bar{u}(\rho, \varphi)$ على الحدود عند $\varphi = \varphi_0$ يتبع وجود $\delta_1(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|\rho - a| < \delta_1(\varepsilon), \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_1(\varepsilon) \quad \text{عندما} \quad |\bar{u}(\rho, \varphi) - \bar{f}(\varphi_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

و

$$|\rho - a| < \delta_1(\varepsilon), \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_1(\varepsilon) \quad \text{عندما} \quad |\underline{u}(\rho, \varphi) - \underline{f}(\varphi_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ومن هذه المتباينات نجد أن :

$$\begin{array}{l} |\rho - a| < \delta(\varepsilon) \\ |\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon) \end{array} \quad \text{عندما} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(\rho, \varphi) \leq \bar{f}(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2} = f(\varphi_0) + \varepsilon, \\ f(\varphi_0) - \varepsilon = \underline{f}(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{u}(\rho, \varphi) \end{array} \right.$$

$$\delta = \min(\delta_0, \delta_1) \quad \text{حيث}$$

وبمقارنة المتباينات الناتجة نجد أن

$$f(\varphi_0) - \varepsilon \leq \underline{u}(\rho, \varphi) \leq u(\rho, \varphi) \leq \bar{u}(\rho, \varphi) \leq f(\varphi_0) + \varepsilon$$

أو

$$\begin{array}{l} |\rho - a| < \delta(\varepsilon) \\ |\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon) \end{array} \quad \text{عندما} \quad |u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0)| < \varepsilon$$

وهو ما يثبت اتصال $u(\rho, \varphi)$ في النقطة (a, φ_0) .

وتنتج محدودية $u(\rho, \varphi)$ من أنه وفقاً لأن نواة بواسون موجبة يكون

$$|u(\rho, \varphi)| < M \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 + \rho^2 - 2ap \cos(\varphi - \psi)} d\psi = M,$$

إذا كانت $|f(\varphi)| < M$. أما قيمة التكامل

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho^2) d\psi}{\rho^2 - 2ap \cos(\varphi - \psi) + a^2} = 1,$$

وذلك لأنه وفقاً لما سبق أن أثبتناه يكون الطرف الأيسر عبارة عن دالة توافقية تؤول باتصال إلى قيمها الحدية $f \equiv 1$ ، ومثل هذه الدالة تساوى الواحد الصحيح بالتطابق. وبالمثل $u(\rho, \varphi) > M_1$ إذا كانت $f > M_1$ مما يثبت محدودية القيمة المطلقة للدالة $u(\rho, \varphi)$.

بند 4 - دالة المصدر

تعطى طريقة حالة المصدر جهازاً مناسباً للتعبير التحليلي لحل المسائل الحدية.

وفي هذا البند سنورد تعريف وأهم خواص دالة المصدر لمعادلة لابلاس وكذلك سنكوّن دوال المصدر لعدة مناطق بسيطة (الناثرة، الكرة، نصف الفراغ). وهذا التكوين سيتم بطريقة التمثيلات الكهروستاتيكية.

فقرة ١: دالة المصدر للمعادلة $\Delta u = 0$ وخواصها الأساسية. لأية دالة u متصلة هي ومشتقاتها الأولى في منطقة مغلقة T محدودة بسطح أملس بدرجة كافية Σ ولها مشتقات ثانية داخل T يتحقق كما سبق أن أوضحنا في بند ٢، فقرة ١ التمثيل التكاملي:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{PM_0}} \right) \right] d\sigma_P - \frac{1}{4\pi} \int_T \int \frac{\Delta u}{R_{MM_0}} d\tau_M. \quad (1)$$

وإذا كانت الدالة $u(M)$ توافقية فإن التكامل الحجمي (الثلاثي) يكون مساوياً للصفر. أما إذا كانت الدالة $u(M)$ تحقق معادلة بواسون فإن هذا التكامل الحجمي يكون دالة معلومة.

نفرض أن $v(M)$ دالة توافقية ما متصلة في $T + \Sigma$ هي ومشتقاتها الأولى وليس لها نقط منفردة في أى مكان. وعلاقة جرين الثانية

$$\int_{\bar{T}} \int (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \int_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

تعطى :

$$0 = \int_{\Sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma - \int_{\bar{T}} \int v \Delta u d\tau. \quad (2)$$

ويجمع (2) , (1) نحصل على :

$$u(M_0) = \int_{\Sigma} \left[G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right] d\sigma - \int_{\bar{T}} \int \Delta u \cdot G d\tau, \quad (3)$$

حيث

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v \quad (3')$$

دالة في النقطتين $M(x, y, z)$, $M_0(\xi, \eta, \zeta)$. والنقطة M_0 مثبتة ولذا تؤدي x, y, z دور البارامترات.

وتحتوى العلاقة (3) على $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma}$, $u \Big|_{\Sigma}$, بينما تعطى فقط $u \Big|_{\Sigma}$ عند حل المسألة الحدية الأولى وعند حل المسألة الحدية الثانية تعطى فقط قيمة $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma}$. ونختار الدالة v بحيث يكون $G \Big|_{z=0} = 0$ للمسألة الحدية الأولى ($\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0$) للمسألة الحدية الثانية). نعين الدالة $G(M, P)$ بواسطة الشروط :

1 - $G(M, P)$ بوصفها دالة في النقطة $P(\xi, \eta, \zeta)$ عند ثبات $M(x, y, z)$ تحقق معادلة لابلاس

$$\Delta G = G_{\xi\xi} + G_{\eta\eta} + G_{\zeta\zeta} = 0, \quad P \neq M$$

في كل النقط P في المنطقة T إلا في النقطة $P = M$.

2 - $G(M, P)$ عند انطباق متغيرها $(M = P)$ تتحول إلى مالانهاية ويمكن

التعبير عنها في الصورة (3') حيث $v = v(M, P)$ دالة توافقية في كل مكان في T .

٣- $G(M, P)$ تتحول إلى الصفر على الحدود :

$$G(M, P) = 0 \text{ إذا كانت } P \in \Sigma.$$

ويمكن تحقيق هذا الشرط إذا طلبنا أن تكون

$$v|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi R}.$$

والدالة G المعروفة بهذه الطريقة تسمى دالة المصدر النقطي للمسألة الحدية الأولى لمعادلة لابلاس $\Delta u = 0$. وتكفل دالة المصدر إعطاء تعبير صريح لحل المسألة الحدية الأولى لمعادلة لابلاس $\Delta u = 0$. بالفعل تعطى العلاقة (3) :

$$u(M_0) = - \int_{\Sigma} \int u \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma = - \int_{\Sigma} \int f \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma \quad (f = u|_{\Sigma}). \quad (4)$$

وينبغي الأخذ في الاعتبار أن العلاقة (4) قد نتجت بواسطة علاقة جرين التي يفترض فيها تحقق شروط معينة تتعلق بالدالتين G , u والسطح Σ . وفي العلاقة (4) تدخل الصيغة $\frac{\partial G}{\partial n}$ التي لا يتج وجودها على السطح Σ مباشرة من تعريف الدالة G .

وعند الحصول على العلاقة (4) انطلقنا من وجود دالة توافقية u تأخذ على السطح Σ قيمة f . وبذلك فحتى لتلك المناطق التي توجد لها دالة مصدر تحقق شروط قابلية علاقة جرين للتطبيق تعطى العلاقة (4) تعبيراً صريحاً فقط لحلول المسألة الحدية الأولى u تلك التي تحقق شروط قابلية علاقة جرين للتطبيق (بإثبات وحدانية هذا الفصل من حلول المسألة الحدية الأولى).

وقد أوضح البحث التفصيل للعلاقة (4) الذي أجراه عالم الرياضيات الروسي أ. ليابونوف أنه لفصل واسع من السطوح التي تسمى سطوح ليابونوف (انظر بند ٥) تعبر هذه العلاقة عن حل المسألة الحدية الأولى بشروط عامة للغاية.

نتوقف مرة أخرى عند تعريف الدالة G . تعرف الدالة G بواسطة الدالة v التي تعتبر حلاً للمسألة الحدية الأولى للمعادلة

$$\Delta v = 0$$

بالقيم الحدية

$$v|_z = -\frac{1}{4\pi R}.$$

وقد ينشأ انطباع أن لدينا حلقة مفرغة . فلتعيين الدالة u حل المسألة الحدية الأولى يلزم تعيين الدالة v حل نفس هذه المسألة . وفي واقع الأمر لا توجد حلقة مفرغة وذلك لأن معرفة دالة المصدر تكفل حل المسألة الحدية الأولى بقيم حدية اختيارية ($u|_z = f$) في حين أنه لتعيين الدالة G نفسها يكفي حل المسألة الحدية بقيم حدية خاصة معينة ($v|_z = -1/4\pi R$) وهو كما سنرى على عدة أمثلة أسهل بدرجة ملحوظة .

وعند التفسير الكهروستاتيكي تعبر دالة المصدر

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R} + v$$

عن الجهد في النقطة M للشحنة النقطية الموضوعة في النقطة M_0 داخل سطح موصل Σ متصل بالأرض . والحد الأول $1/4\pi R$ من الواضح أنه جهد الشحنة النقطية في الفراغ الحر ، أما الحد الثاني v فيعني جهد مجال الشحنات المستحثة (induced) على السطح الموصل Σ . وبذلك فإن تكوين دالة المصدر يؤدي إلى تعيين المجال المستحث*

نتوقف عند بعض خواص دالة المصدر . وعندئذ سنفترض أن المناطق محل الدراسة هي بحيث توجد لها دوال مصدر ذات مشتقات عمودية على السطح Σ وتحقق شروط قابلية علاقة جرين للتطبيق .

* عند التفسير الحراري تعرف درجة الحرارة المستقرة (التي لا تتحد على الزمن) للمصدر الحراري النقطي التي شدته q بالعلاقة

$$q/4\pi kr,$$

حيث k معامل التوصيل الحراري . وبذلك فالدالة $G(M, M_0)$ هي عبارة عن درجة الحرارة في النقطة M إذا كانت درجة حرارة سطح الجسم مساوية للصفر ووضع عند النقطة M_0 مصدر حراري شدته $q = k$.

وإذا اختير مقياس رسم الأطوال بحيث يكون $k = 1$ فإن الدالة G تناظر مصدرا شدته تساوى الواحد الصحيح .

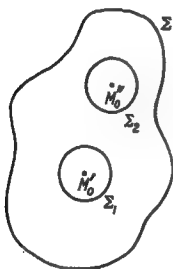
١ - دالة المصدر موجبة في كل مكان داخل T . بالفعل ، الدالة G تتحول إلى الصفر على حدود المنطقة Σ وتكون موجبة على سطح كرة صغيرة صفرًا كافيًا مرسومة حول القطب . ومن هنا ينتج وفقًا لمبدأ القيمة العظمى أن G موجبة في كل المنطقة . ونشير أيضًا إلى أن

$$\left. \frac{dG}{dn} \right|_{\Sigma} \leq 0,$$

هو ما ينتج مباشرة من أن G موجبة ومن الشرط $G|_{\Sigma} = 0$.

٢ - دالة المصدر متماثلة بالنسبة إلى متغيرها $M(\xi, \eta, \zeta)$ ، $M_0(x, y, z)$:

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$



شكل ٥٠

رض أن M_0^1 ، M_0^2 نقطتان مثبتتان من نقط
طقة T . نكوّن السطحين الكرويين
 Σ_1 ، Σ_2 ونصف قطر كل منهما ρ ومركزهما
النقطتين M_0^1 ، M_0^2 (شكل ٥٠) .
س أن

$$u(M) = G(M, M_0^1),$$

$$v(M) = G(M, M_0^2)$$

ن علاقة جرين

$$\iiint_{T_{\rho}} (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

طقة T_{ρ} المحدودة بالسطوح Σ ، Σ_1 ، Σ_2 منحصل على :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma_1} \left[G(M, M_0^1) \frac{\partial G(M, M_0^2)}{\partial n} - G(M, M_0^2) \frac{\partial G(M, M_0^1)}{\partial n} \right] d\sigma_M + \\ & + \iint_{\Sigma_2} \left[G(M, M_0^1) \frac{\partial G(M, M_0^2)}{\partial n} - G(M, M_0^2) \frac{\partial G(M, M_0^1)}{\partial n} \right] d\sigma, \end{aligned}$$

أن الطرف الأيسر للمعادلة (٥) يساوى الصفر لأن $\Delta G = 0$ والتكامل

المأخوذ على السطح Σ يساوى الصفر وفقاً للشروط الحدية. وبالاتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \rightarrow 0$ والاستعانة بخواص دالة المصدر نحصل على * :

$$G(M_0', M_0'') = G(M_0'', M_0')$$

أو

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

والتماثل المثبت لدالة المصدر يعتبر هو الصيغة الرياضية لمبدأ التبادل في الفيزياء (reciprocity law) : المصدر الموضوع في النقطة M_0 يحدث عند النقطة M نفس التأثير الذي يحدثه عند النقطة M_0 للمصدر الموضوع في النقطة M . ويحمل مبدأ التبادل طابعاً عاماً للغاية ويسرى على كثير من المجالات الفيزيائية (الكهرومغناطيسية، مجال المرونة ** .. الخ).

ونشير كحالة خاصة إلى أنه من خواص التماثل ينتج أن الدالة $u(M_0) = G(M, M_0)$ بوصفها حالة في المتغيرات x, y, z للنقطة M_0 عند ثبات M تتمتع بنفس خاصية الدالة $v(M) = G(M, M_0)$ في المتغيرات ξ, η, ζ للنقطة M عند ثبات M_0 ، أى أن $\Delta_M G = 0$ عندما $M \neq M_0$ و $G = 0$ عندما $M_0 \in \Sigma$

ودالة المصدر $G(M, M_0)$ لحالة الفراغ الثنائي الأبعاد (المستوى) ستحدد بالشروط :

$$1 - \Delta G = 0 \text{ في كل مكان في المنطقة محل البحث } S \text{ إلا في النقطة } M = M_0.$$

٢ - في النقطة $M = M_0$ يكون للدالة G نقطة منفردة على الصورة

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}}.$$

* هذه النظرية التيها ليايرونوف لفصل من السطوح تسمى بسطوح ليايرونوف.

• في علم المرونة يسمى مبدأ التبادل بنظرية بيتي للتبادل وتنص على أن الشغل الذي تبذله مجموعة قوى في إزاحة حادثة من تأثير مجموعة قوى أخرى يساوى الشغل الذى تبذله مجموعة القوى الثانية في الإزاحة الحادثة بتأثير مجموعة القوى الأولى (ملاحظة للترجم).

٣- $G|_C = 0$ حيث C حدود المنطقة S (محيطة). وفي هذه الحالة تكون دالة المصدر على الصورة :

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} + v(M, M_0),$$

حيث v دالة متصلة وتوافقية في كل مكان وتحقق على الحدود الشرط

$$v|_C = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}}.$$

وحل المسألة الحدية الأولى للمعادلة $\Delta u = 0$ يعطى عندئذٍ بالعلاقة :

$$u(M_0) = - \int_C f \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (f = u|_C).$$

فقرة ٢ : طريقة التمثيلات الكهروستاتيكية ودالة المصدر للكوة. تعتبر طريقة التمثيلات الكهروستاتيكية أكثر الطرق شيوعاً لتكوين دالة المصدر. وتنحصر فكرة هذه الطريقة في أنه عند تكوين دالة المصدر

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v$$

يكون المجال المستحث v هو عبارة عن مجال الشحنات الواقعة خارج السطح Σ والمختارة بحيث يتحقق الشرط

$$v|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi R}.$$

وهذه الشحنات تسمى بالتمثيلات الكهروستاتيكية لوحدة الشحنة الموضوعة في النقطة M_0 والتي تكوّن عند عدم وجود السطح Σ جهلاً مقداره $1/4\pi R$. وفي كثير من الحالات لا يشكل اختيار مثل هذه الشحنات أية صعوبة. وسنورد فيما بعد أمثلة على تكوين دالة المصدر بطريقة التمثيلات الكهروستاتيكية.

ومن صيغ دوال المصدر الناتجة في كل هذه الأمثلة يتضح بشكل مباشر اتصال المشتقات الأولى للدوال G على السطح Σ .

وبمثابة المثال الأول ندرس دالة المصدر للكوة.

نفرض أن لدينا كرة نصف قطرها R مركزها في النقطة O والمطلوب تعيين دالة المصدر لها.

حيث $r_0 = |\vec{M}_0 P|$, $r_1 = |\vec{M}_1 P|$. ومن التناسب (7) نحصل على

$$r_0 = \frac{\rho_0}{R} r_1$$

لجميع نقط السطح الكروي . ولذا فإن الدالة التوافقية $v = -\frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r_1}$ تأخذ على السطح الكروي نفس القيمة التي تأخذها الدالة $1/r_0$ - وهى تعبر كما هو واضح عن جهد الشحنة التى مقدارها $-R/\rho_0$ والموضوعة فى النقطة M_1 .

وبذلك فالدالة

$$G(P, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r_1} \right) \quad (8)$$

تعتبر هى دالة المصدر المطلوب تعيينها للكرة لأنها دالة توافقية لها عند النقطة M_0 انفراد على الصورة $1/4\pi r_0$ وتؤول إلى الصفر على سطح الكرة .

وحل المسألة الحدية الأولى يعطى بالعلاقة (4) .

نحسب المشتقة

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) - \frac{R}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right], \quad (9)$$

حيث n العمودى الخارجى ، $r_1 = |\vec{M}_1 M|$ (M بوجه عام لا تقع على السطح الكروي) .

ومشتقتا $1/r_0$, $1/r_1$ باتجاه العمودى n تساويان

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) &= \frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{1}{r_0} \right) \frac{\partial r_0}{\partial n} = -\frac{1}{r_0^2} \cos(\widehat{r_0, n}), \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{1}{r_1} \right) \frac{\partial r_1}{\partial n} = -\frac{1}{r_1^2} \cos(\widehat{r_1, n}), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

لأن

$$\frac{\partial r_0}{\partial n} = \cos(\widehat{r_0, n}), \quad \frac{\partial r_1}{\partial n} = \cos(\widehat{r_1, n}). \quad (11)$$

ولا يصعب تعيين مقدارى $\cos(\widehat{r_0, n})$, $\cos(\widehat{r_1, n})$:

$$\cos(\widehat{r_0, n}) = \frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0}, \quad (11')$$

$$\cos(\widehat{r_1, n}) = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1}. \quad (11'')$$

وبالاستعانة بالتناسب (7) نحصل على :

$$\cos(\widehat{r_1, n})|_{\Sigma} = \frac{R^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} r_0^2 - \frac{R^2}{\rho_0^2}}{2R \frac{R}{\rho_0} r_0} = \frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2\rho_0 r_0},$$

ذلك لأن $\rho_1 = \frac{R^2}{\rho_0}$ وفقاً لتعريف النقطة M_1 و $r_1 = \frac{R}{\rho_0} r_0$ على السطح الكروي Σ بالاستعانة بالعلاقات (10) وكذلك بالصيغ (9), (11'), (11'') نجد أن :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\Sigma} &= \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{1}{r_0^2} \frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0} + \frac{\rho_0^2}{R^2 r_0^2} \frac{R}{\rho_0} \frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2\rho_0 r_0} \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^2}. \end{aligned}$$

وبذلك فإن الدالة $u(M_0)$ وفقاً للعلاقة (4) تكون مساوية :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\Sigma} \int f(P) \frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^2} d\sigma_P. \quad (12)$$

ندرج مجموعة إحداثيات كروية نقطة أصلها في مركز الكرة. نفرض أن (R, θ, φ) هي إحداثيات النقطة P ، $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ إحداثيات النقطة M_0 ، γ هي الزاوية بين متجهي الموضع \overrightarrow{OP} ، $\overrightarrow{OM_0}$. عندئذ يمكن كتابة العلاقة (12) في الصورة :

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma + \rho_0^2)^{3/2}} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (12')$$

حيث

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (13)$$

وهذه العلاقة تسمى بتكامل بواسون للكرة* .
وبنفس الطريقة يمكن تكوين دالة المصدر للمنطقة الخارجية بالنسبة إلى الكرة :

$$G(M, M_1) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{\rho_1} \frac{1}{r_0} \right), \quad (14)$$

حيث $r_1 = MM_1$ البعد عن نقطة مثبتة M_1 تقع خارج الكرة ، $r_0 = MM_0$ البعد عن النقطة M_0 المترافقة مع النقطة M_1 ، ρ_1 بعد M_1 عن نقطة الأصل ، R نصف قطر الكرة .

ويأخذ الاختلاف في اتجاهي العمودين للمسألتين الداخلية والخارجية نحصل على :

$$u(\rho_1, \theta_1, \varphi_1) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho_1^2 - R^2}{[R^2 - 2\rho_1 R \cos \gamma + \rho_1^2]^{3/2}} f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

حيث يعطى $\cos \gamma$ بالعلاقة (13) (يجب تغيير الدليل 0 بالدليل 1) .

فقرة ٣ : دالة المصدر للدائرة . يمكن الحصول على دالة المصدر للدائرة بنفس الطريقة كدالة المصدر للكرة . وفي هذه الحالة يجب البحث عن الدالة في الصورة :

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + v. \quad (15)$$

وبتكرار التحليلات التي أجريتها في الفقرة السابقة ابتداء من العلاقة (6) حتى الحصول على العلاقة (8) نعين الدالة G في الصورة :

$$G(P, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{r_0} - \ln \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r_1} \right], \quad (16)$$

حيث $R = OP$ ، $r_1 = M_1P$ ، $r_0 = M_0P$ ، $\rho_0 = OM_0$ نصف قطر الدائرة

بالقول . جيوب النام الاتجاهية للمتجهين \vec{OM}_0 ، \vec{OP} تساوى على الترتيب

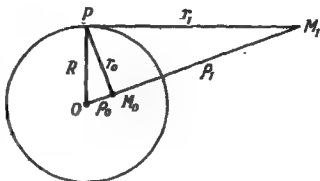
$$(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \cdot (\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0)$$

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \theta \cdot \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 (\cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0) = \\ &= \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0). \end{aligned}$$

(شكل ٥٢). وليس من الصعب التحقق من أن الدالة التوافقية المعروفة بهذه الطريقة تتحول إلى الصفر على الحدود: $G|_C = 0$.

ولحل المسألة الحدية الأولى يجب حساب قيمة $\frac{\partial G}{\partial n}$ على المحيط C . ويتم هذا الحساب بالمثل كما أجريناه في حالة الكرة، ويعطى

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_C = -\frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^3}.$$



شكل ٥٢

نفرض أن (ρ, θ) هما الإحداثيان القطبيان للنقطة P الواقعة على المحيط، (ρ_0, θ_0) إحداثيا النقطة M_0 . عندئذ فإن

$$r_0^2 = R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0).$$

بالتعويض في العلاقة

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C u(P) \frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^3} \frac{ds}{R}$$

بصيغة r_0 السابقة والأخذ في الاعتبار أن

$$u(P)|_C = f(\theta) \quad ds = R d\theta$$

نصل إلى صيغة الدالة $u(M_0)$ التالية :

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^3 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)} f(\theta) d\theta, \quad (17)$$

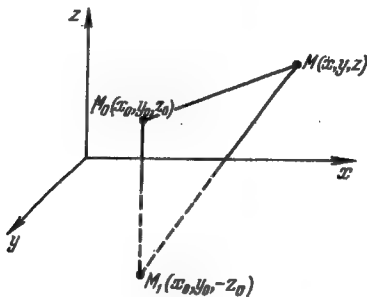
التي تسمى تكامل بواسون للدائرة (انظر صفحة ٣٧٠، العلاقة (13)). وهذه العلاقة تعطى بدقة حتى الإشارة حل المسألة الخارجية أيضاً.

فقرة ٤ : دالة المصدر لنصف الفراغ. يسرى مفهوم دالة المصدر والعلاقة (4) للفراغ اللانهائي أيضاً إذا درست الدوال المنتظمة (regular) في الملائمة (انظر بند ٢، فقرة ٦). نعين حالة المصدر لنصف الفراغ $z > 0$. نضع في النقطة

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ وحدة شحنة تكوّن في الفراغ اللانهائي مجالاً جهده يعرف بالدالة

$$R_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad \text{حيث} \quad \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_{M_0M}}$$

ولا يصعب ملاحظة أن المجال المستحث σ يعتبر مجالاً لوحدة الشحنة السالبة



شكل ٥٣

الموضوعة في النقطة $M_1(x_0, y_0, -z_0)$ التي تعتبر انعكاساً مرآوياً للنقطة M_0 في المستوى $z=0$ (شكل ٥٣). والدالة σ التي تساوي

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_0} - \frac{1}{4\pi R_1},$$

حيث

$$R_0 = |\vec{M_0M}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

$$R_1 = |\vec{M_1M}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2},$$

تؤول إلى الصفر عند $z=0$ ولها الانفراد المطلوب عند M_0 .

نحسب $\left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} = - \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0}$ من الواضح أن

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{z-z_0}{R_0^3} + \frac{z+z_0}{R_1^3} \right].$$

بوضع $z=0$ نحصل على

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial n} \right|_{z=0} = - \left. \frac{\partial Q}{\partial z} \right|_{z=0} = - \frac{z_0}{2\pi R_0^2}.$$

وحل المسألة الحدية الأولى يعطى بالعلاقة

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{\Sigma_0} \frac{z_0}{R_{M_0 P}^2} f(P) d\sigma_P,$$

حيث Σ_0 هو المستوى $z=0$ و $f(P)=u$ أو

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{\frac{3}{2}}} f(x, y) dx dy. \quad (18)$$

بند 5 - نظرية الجهد

الدالة $\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$ التي تعبر عن جهد مجال وحدة الكتل (الشحنة) الموضوعة في النقطة $M_0(\xi, \eta, \zeta)$ تعتبر خلا لمعادلة لابلاس يعتمد على البارامترات ξ, η, ζ . وتكاملات هذه الدالة بالبارامترات تسمى بالجهد ولها أهمية جوهرية في التطبيقات المباشرة للفيزياء وكذلك من وجهة نظر تطور طرق حل المسائل الحدية.

فقرة ١ : الجهد الحجمي. نفرض أن كتلة m_0 موضوعة في النقطة $M_0(\xi, \eta, \zeta)$. وحسب قانون الجذب العام تؤثر على الكتلة m الموضوعة في النقطة $M(x, y, z)$ قوة الجذب

$$F = -\gamma \frac{mm_0}{R^2} r, \quad (1)$$

حيث $r=R/R$ متجه الوحدة في اتجاه $\vec{M_0M}$ ($R=\vec{M_0M}$)، و γ ثابت الجاذبية. وباختيار مجموعة وحدات القياس بحيث يكون $\gamma=1$ وفرض أن $m=1$ نحصل على :

$$F = - \frac{m_0}{R^2} r.$$

ومساقط هذه القوة على المحاور الإحداثية تساوى

$$\left. \begin{aligned} X &= F \cos \alpha = -\frac{m_0}{R^3} (x - \xi), \\ Y &= F \cos \beta = -\frac{m_0}{R^3} (y - \eta), \\ Z &= F \cos \gamma = -\frac{m_0}{R^3} (z - \zeta), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

حيث α, β, γ الزوايا التى يكونها المتجه F مع المحاور الإحداثية .

ندرج فى دراستنا الدالة u التى تسمى بجهد مجال القوى* والمعروفة بالمتساوية

$$F = \text{grad } u$$

أو

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

وفى حالتنا

$$u = \frac{m_0}{R}.$$

وجهد المجال لعدد n من النقط المادية سيعبر عنه وفقاً لتراكب مجالات القوى بالعلاقة :

$$u = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{R_i}.$$

نتنقل إلى حالة التوزيع المتصل للكتل . نفرض أن لدينا جسماً T كثافته $\rho(\xi, \eta, \zeta)$. نعين جهد هذا الجسم فى النقطة $M(x, y, z)$. ولهذا الغرض نقسم الجسم T إلى أجزاء صغيرة صغيراً كافياً $\Delta \tau$. ونفرض فرضاً طبعياً يكن فى أن تأثير العنصر $\Delta \tau$ مكافئ لتأثير كتلته المركزة فى نقطة ما «متوسطة»** فى الحجم

* يجب عدم الخلط بين الجهد وطاقة وضع مجال القوى . فمصطلح الجهد يستخدم هنا بنفس معنى دالة القوى فى الميكانيكا .

** وبصورة أكثر دقة يفترض عندئذ أن تأثير حجم ما T كتلته m على نقطة واقعة خارج الحجم المذهب \bar{T} الذى يحتوى هذا الجسم ، يمكن استبداله بتأثير مركزه لـ m له نفس الكتلة m ويقع داخل \bar{T} .

$\Delta \tau$ ، وعندئذ لمركبة القوة المؤثرة على النقطة M نحصل على الصيغة التالية :

$$R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \quad \text{حيث} \quad \Delta X = -\frac{\rho \Delta \tau}{R^3} (x - \xi)$$

ويعطى التكامل المأخوذ على كل الحجم T مركبة القوة الكاملة لجذب النقطة M بالجسم T

$$X = - \int_T \int \int \rho \frac{x - \xi}{R^3} d\tau. \quad (3)$$

والجهد في النقطة M سيتحدد بالعلاقة

$$u(M) = \int_T \int \int \rho \frac{1}{R} d\tau. \quad (4)$$

وإذا كانت النقطة M تقع خارج الجسم فإن ذلك يمكن التحقق منه بالتفاضل مباشرة تحت علامة التكامل*. وبالمثل نحسب أيضا المشتقات من الرتب العليا. ومن الواضح أن الجهد $u(M)$ خارج الجسم T يحقق معادلة لابلاس (انظر تفصيل ذلك صفحة ٤٠٢). وفي المستقبل سنستعين بالخواص المذكورة أعلاه للجهود ، دون أن نحاول تكوين النظرية بالشروط الأكثر عمومية ، كما سنصوغ عدة نظريات بشرط أن يكون ρ دالة محدودة (يفترض أنها قابلة للتكامل).

إذا كانت النقطة M تقع داخل المنطقة T فلا يمكن التأكيد بأن $X = \frac{\partial u}{\partial x}$ بدون بحث إضافي ستقوم به فيما سيلي.

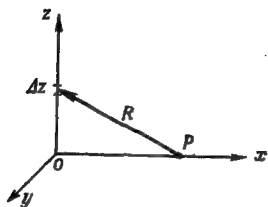
فقرة ٢ : المسألة المستوية . الجهد اللوغاريتمي . ندرس توزيع الكتل في الفراغ المعتمد فقط على إحداثيين (x, y) . في أى مستوى $z = \text{const}$ كما هو

• لإمكانية تفاضل التكامل المحدود على الصورة

$$f(M) = \int_T F(M, P) \varphi(P) d\tau_P$$

بالنسبة إلى البارامتر تحت علامة التكامل يكن اتصال مشتقة الدالة $F(M, P)$ بالبارامتر وقابلية التكامل مطلقا للدالة $\varphi(P)$. وعادة تصاغ هذه النظرية عندما $\varphi(P) = 1$ ولا يختلف إثباتها في حالتنا عن الحالة العادية .

واضح ، يأخذ الجهد نفس القيمة ولذا يكفي بحث جهد النقطة (x, y) الواقعة في المستوى $z = 0$.



شكل ٥٤

نعين جهد المستقيم المتجانس اللانهائي L . نمد المحور z على امتداد هذا المستقيم . نفرض أن كتلة وحدة الطول تساوي μ . قوة جذب النقطة $P(x, 0)$ بالعنصر Δz (شكل ٥٤) ومركبتها على المحور x يساويان على الترتيب :

$$\Delta F = -\frac{\mu \Delta z}{R^2} = -\frac{\mu \Delta z}{(x^2 + z^2)},$$

$$\Delta X = \Delta F \cos \alpha = -\mu \Delta z \cdot \frac{x}{V(x^2 + z^2)^{3/2}}.$$

ومن هنا

$$X = -\int_{-\infty}^{\infty} \mu x \frac{dz}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = -\mu x^2 \frac{1}{x^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = -\frac{2\mu}{x} \quad (z/x = \tan \alpha).$$

وإذا كانت النقطة $P(x, y)$ نقطة اختبارية فإن قوة جذب هذه النقطة بالمستقيم L ستكون متجهة على امتداد \overline{OP} ومساوية في المقدار :

$$F = -\frac{2\mu}{\rho},$$

حيث

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

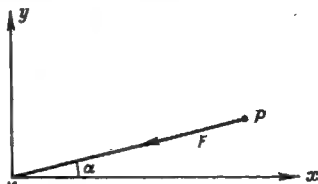
وجهد هذه القوة يسمى بالجهد اللوغاريتمي ويساوي

$$V = 2\mu \ln \frac{1}{\rho}, \quad (5)$$

وهو ما يسهل التأكد منه بالتفاضل مباشرة .

والجهد اللوغاريتمي هو حل معادلة لابلاس في متغيرين مستقلين ، وهذا الحل له تماثل دائري حول القطب في النقطة $\rho=0$ حيث يؤول فيها إلى المالا نهاية ..

وبذلك فإن جهد المستقيم للتجانس يعطى بجالاً مستويًا ويعبر عنه بالعلاقة (5) . والتعبير عن الجهد في صورة تكامل قد سبق أن حصلنا عليه للحجوم المحدودة* . ونشير إلى أنه على خلاف الجهد الحجمي لا يؤول الجهد اللوغاريتمي



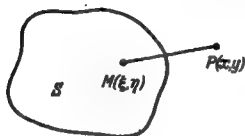
شكل ٥٥

إلى الصفر في المالا نهاية وإنما يكون له هناك انفراد لوغاريتمي .

نحسب الآن مركبات قوة الجذب للنقطة P (شكل ٥٥) :

$$X = F \cos \alpha = -2\mu \frac{x}{\rho^3} \quad \left(\cos \alpha = \frac{x}{\rho} \right),$$

$$Y = F \sin \alpha = -2\mu \frac{y}{\rho^3} \quad \left(\sin \alpha = \frac{y}{\rho} \right).$$



شكل ٥٦

وإذا وجدت عدة نقط (أو عدة مستقيمت لانهاية بكتلة موزعة على امتدادها) فإن جهود النقط (المستقيمت) يتم جمعها . وذلك وفقًا لمبدأ تراكم مجالات القوى .

* عند حساب جهد المستقيم اللانهاي لم يكن من الممكن تكامل جهود العناصر المنفردة بشكل مباشر لأنه في هذه الحالة كان ميتج تكامل متباعد . بالفعل - جهد العنصر Δz يساوي

$$\Delta s = \mu \frac{\Delta z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

وتعطى عملية التكامل الشكل تكاملاً متباعدًا

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

في حالة المنطقة S ذات الكثافة الموزعة باتصال $\mu(\xi, \eta)$ (شكل ٥٦) يعبر عن مركبتى قوة جذب النقطة P بتكاملين ثنائيين :

$$\left. \begin{aligned} X &= -2 \iint_S \mu(\xi, \eta) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta, \\ Y &= -2 \iint_S \mu(\xi, \eta) \frac{y - \eta}{(y - \eta)^2 + (x - \xi)^2} d\xi d\eta, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ويكون الجهد مساويا

$$\mu(x, y) = 2 \iint_S \mu(\xi, \eta) \ln \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi d\eta \quad (7)$$

وهو ما لا يصعب التحقق منه بإجراء عملية التفاضل للنقط الواقعة خارج S .
أما إذا كانت النقطة P تقع في المنطقة S فن الضرورى إجراء بحث إضافى.

فقرة ٣ : التكاملات المعتلة. تمثل الجهود ومركبات قوى الجذب بواسطة التكاملات حيث تتوول الدوال المكاملة لهذه التكاملات إلى المالا نهاية إذا ما درسنا قيمها في النقط الواقعة في المنطقة التى تحتوى على كتل جاذبة.

وكما نعلم ، إذا كانت الدالة المكاملة تتوول عند نقطة معينة من نقط منطقة التكامل إلى المالا نهاية فإن التكامل لا يمكن تعريفه كنهاية مجموع . بالفعل فى هذه الحالة لا يكون للمجموع التكاملى نهاية ، لأن الحد المتعلق بذلك الحجم الأولى (عنصر الحجم) المحتوى على النقطة المنفردة يمكن أن يغير بأى قدر حاد مقدار المجموع وفقاً لاختيار النقطة الوسطية . وتسمى التكاملات المأخوذة لمثل هذه الدوال بالتكاملات المعتلة (improper integrals) .

نفرض أنه في المنطقة T معطاة الدالة $F(x, y, z)$ التى تتوول إلى المالا نهاية عند نقطة معينة $M_0(x_0, y_0, z_0)$. ندرس التكامل المحدود المأخوذ على المنطقة $T - K_\epsilon$ حيث K_ϵ جوار ما للنقطة M_0 قطره لا يفوق ϵ .

• هذا يناظر فى الفراغ أسطوانة ذات رواسم موازية للمحور z ومقطعها S فى المستوى (x, y) بكثافة حجمية $\mu(\xi, \eta)$ لا تعتمد على z .

وإذا كانت متتابعة التكاملات

$$I_n = \int_{T-K_{e_n}} \int F d\tau \quad (e_n \rightarrow 0)$$

عند التضييق الاختياري للمنطقة K_{e_n} حتى تتحول إلى النقطة M_0 لها نهاية لا تعتمد على اختيار المناطق K_{e_n} فإن هذه النهاية تسمى بالتكامل المعتل للدالة $F(x, y, z)$ على المنطقة T ويرمز له كالعادة بالرمز

$$\int_T \int F d\tau.$$

وإذا وجدت ولو متتابعة واحدة من المناطق \bar{K}_{e_n} بحيث إنه عندما $e_n \rightarrow 0$ توجد النهاية \bar{I} وللمتتابعات الأخرى K_{e_n} يكون لهذه النهاية قيم أخرى، أو لا توجد هذه النهاية على الإطلاق، فإن النهاية I تسمى بالتكامل المعتل المتقارب شرطياً. ومن الواضح أنه عند دراسة التكامل المعتل المتقارب شرطياً I يجب تعيين تلك المتتابعة للمناطق \bar{K}_{e_n} التي يعرف وفقاً لها هذا التكامل.

وسنكتفي هنا بدراسة تلك الحالة عندما يكون للدالة المكاملة انفراد في نقطة معزولة. نبحث تقارب التكامل على الصورة:

$$\int_T \int \frac{C}{R^\alpha} d\tau_{M_0} \quad (8)$$

حيث $\alpha > 0$ ، C ثابتان،

$$R = R_{MM_0} = \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2},$$

M_0 - نقطة من نقط المنطقة T . وبدون تحديد للعمومية يمكن اعتبار أن T عبارة عن كرة نصف قطرها R ومركزها في النقطة M_0 . نأخذ بمثابة المنطقة K_{e_n} كرة نصف قطرها e_n ومركزها في النقطة M_0 ونبحث عن نهاية متتابعة التكاملات

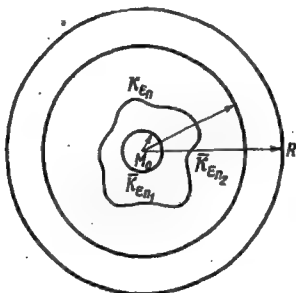
$$\begin{aligned} \int_{T-K_{e_n}} \int \frac{C}{R^\alpha} d\tau &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{e_n}^R \frac{C}{r^{\alpha-2}} dr = 2\pi \cdot 2C \int_{e_n}^R \frac{dr}{r^{\alpha-2}} = \\ &= \begin{cases} 4\pi C \left[\frac{1}{3-\alpha} r^{3-\alpha} \right]_{e_n}^R, & \alpha \neq 3, \\ 4\pi C [\ln r]_{e_n}^R, & \alpha = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما ε_n إلى الصفر يتضح أنه عندما $\alpha < 3$ توجد نهاية ، وعندما $\alpha \geq 3$ لا توجد نهاية .

نوضح أنه إذا كانت الدالة $F(x, y, z)$ غير سالبة وتوجد النهاية

$$I_n = \iiint_{T-\bar{K}_{\varepsilon_n}} F d\tau \quad (\varepsilon_n \rightarrow 0),$$

حيث \bar{K}_{ε_n} كرة نصف قطرها ε_n ومركزها في النقطة M_0 فإنه توجد نهاية



شكل ٥٧

للتكاملات I عند أي اختيار للمتتابعات K_{ε_n} المضمحلة إلى النقطة M ، وقيمة هذه النهاية لا تعتمد على شكل المنطقة K_{ε_n} . وأية منطقة K_{ε_n} يمكن حصرها بين سطحين كرويين $\bar{K}_{\varepsilon_{n1}}$ ، $\bar{K}_{\varepsilon_{n2}}$ نصف قطرهما ε_{n1} ، ε_{n2} يؤولان إلى الصفر مع ε_n (شكل ٥٧) . ووفقاً لأن الدالة المكاملة غير سالبة فإن

$$\iiint_{T-\bar{K}_{\varepsilon_{n1}}} F d\tau \geq \iiint_{T-\bar{K}_{\varepsilon_n}} F d\tau \geq \iiint_{T-\bar{K}_{\varepsilon_{n2}}} F d\tau.$$

ومن هنا يتضح أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iiint_{T-\bar{K}_{\varepsilon_n}} F d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \iiint_{T-\bar{K}_{\varepsilon_n}} F d\tau = I,$$

وذلك لأن نهايتي التكاملين الأول والثالث موجودتان وتساويان هذا العدد .

وبذلك في حالة المتغيرات الثلاثة المستقلة يكون التكامل المعتل

$$\int_T \int \frac{C}{R^\alpha} d\tau \quad (8)$$

موجوداً إذا كان $\alpha < 3$ وغير موجود إذا كانت $\alpha \geq 3$.

وفي حالة عدد آخر من المتغيرات المستقلة تكون القيمة الحرجة للبارامتر α ،
التي تحدد حدود تقارب التكاملات على الصورة (8) ، مساوية لعدد الأبعاد
(عدد المتغيرات المستقلة) فثلاً في حالة المتغيرين المستقلين يكون التكامل

$$\int_T \int \frac{C}{\rho^\alpha} d\sigma$$

متقارباً عند $\alpha < 2$ ،
متباعداً عند $\alpha \geq 2$.

ونتوقف عند اختبار تقارب التكاملات المعتلة. ثبت أنه :

لتقارب التكامل المعتل

$$\int_T \int \int F(x, y, z) dx dy dz \quad (9)$$

يكفى أن توجد تلك الدالة $\bar{F}(x, y, z)$ التي يتقارب التكامل المعتل لها المأخوذ
على المنطقة T وتحقق لها المتباينة

$$|F(x, y, z)| < \bar{F}(x, y, z). \quad (10)$$

ندرس متابعة ما من المناطق K_ε التي تحتوى النقطة المنفردة M_0 . ووفقاً
لتقارب متابعة التكاملات \bar{I}_n للدالة \bar{F} فإنه لأى عدد $\varepsilon > 0$ يوجد ذلك
 $N(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|\bar{I}_{n_1} - \bar{I}_{n_2}| = \left| \int_{K_{\varepsilon n_1} - K_{\varepsilon n_2}} \bar{F} d\tau \right| < \varepsilon.$$

بمجرد أن يكون $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$. وحيث أن \bar{F} تعتبر دالة الحد الأعظم
(majorant) للدالة $F(x, y, z)$ فإنه يمكن كتابة :

$$|I_{n_1} - I_{n_2}| = \left| \int_{K_{\varepsilon n_1} - K_{\varepsilon n_2}} F d\tau \right| \leq \int_{K_{\varepsilon n_1} - K_{\varepsilon n_2}} |F| d\tau \leq \int_{K_{\varepsilon n_1} - K_{\varepsilon n_2}} \bar{F} d\tau < \varepsilon, \quad (10')$$

إذا كان $n_1, n_2 > N(s)$. وتحقق الشرط (10') وفقاً لاختبار كوشي للتقارب يعتبر كافياً لتقارب المتابعة

$$I_n = \int_{T-K_{n_n}} \int \int F d\tau$$

إلى نهاية معينة

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_T \int \int F d\tau.$$

ولا يصعب أن نرى أن هذه النهاية لن تعتمد على شكل المناطق K_{n_n} . وبذلك فإن وجود التكامل المعتل (9) قد أثبت .

وإذا أمكن للدالة ما $F(x, y, z)$ تعيين تلك الدالة الموجبة $P(x, y, z)$ بحيث إن $F(x, y, z) > P$ وكان التكامل المعتل للدالة P على المنطقة T متباعداً فإن التكامل (9) سيكون متباعداً كما هو واضح .

نتيجة : إذا تحققت للدالة ما $F(M, P)$ تؤول إلى المالا نهاية عند $P = M$ المتباينة

$$|F(M, P)| < \frac{C}{R_{MP}^\alpha}, \quad \alpha = \text{const} < 3, \\ C = \text{const} < \infty,$$

فإن التكامل المعتل على المنطقة T المحتوية على النقطة M

$$\int_T \int \int F(M, P) d\tau_P$$

يتقارب .

ومن نظرية التكاملات اللامعتلة المعتمدة على البارامترات نعلم أن اتصال الدالة المكاملة بالنسبة إلى البارامترات والمتغيرات المستقلة يعتبر شرطاً كافياً لاتصال التكامل نفسه كدالة في البارامترات* . وفي حالة التكاملات المعتلة لا يتحقق اتصال الدالة المكاملة ولذلك فالمعيار المشار إليه غير قابل للتطبيق . ثبت معيار اتصال التكاملات المعتلة المعتمدة على بارامترات .

* انظر كتاب يسكونوف «التكامل والتفاضل» الجزء الثاني طبعة دار «مير» باللغة العربية .

$$V(M) = \int_T F(P, M) f(P) d\tau_P, \quad (11)$$

حيث $F(P, M)$ دالة تتحول إلى المالا نهاية عند انطباق متغيريها ومتصلة بالنسبة إلى M و $f(P)$ دالة محدودة.

يسمى التكامل (11) تكاملاً متقارباً بانتظام في النقطة M_0 إذا أمكن لأي عدد $\varepsilon > 0$ تعيين $\delta(\varepsilon)$ بحيث تتحقق المتباينة

$$|V_{\delta(\varepsilon)}(M)| = \left| \int_{T_{\delta(\varepsilon)}} F(P, M) f(P) d\tau_P \right| \leq \varepsilon$$

لأية نقطة M بعدها عن M_0 أصغر من $\delta(\varepsilon)$ ولأية منطقة $T_{\delta(\varepsilon)}$ تحتوى النقطة M_0 وقطرها $d \leq \delta(\varepsilon)$.

نثبت أن التكامل

$$V(M) = \int_T F(P, M) f(P) d\tau_P,$$

المنتظم التقارب في النقطة M_0 هو دالة متصلة في هذه النقطة. ويجب علينا أن نثبت أنه لأي ε يمكن تعيين $\delta(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|V(M_0) - V(M)| < \varepsilon$$

عندما

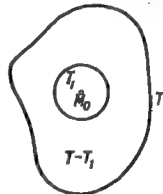
$$|\overrightarrow{MM_0}| < \delta(\varepsilon).$$

نختار داخل المنطقة T منطقة ما

T_1 تحتوى النقطة M_0 (شكل ٥٨)

ونقسم التكامل إلى حدين

$$V = V_1 + V_2,$$



شكل ٥٨

حيث V_1 يؤخذ على المنطقة T_1 و V_2 يؤخذ على المنطقة $T_2 = T - T_1$. وفي المستقبل سنعرف بدقة أكثر مقاييس المنطقة T_1 . ندرس المتباينة

$$|V(M_0) - V(M)| \leq |V_2(M_0) - V_2(M)| + |V_1(M_0)| + |V_1(M)|$$

ونبين أنه يمكن جعل كل حد من حدود الطرف الأيمن أصغر من $\varepsilon/3$ عند $|\vec{M}_0\vec{M}|$ الصغير صغراً كافياً . باختيار المنطقة T_1 داخل كرة نصف قطرها $\delta(\varepsilon/3)$ سنحصل على :

$$|V_1(M_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad , \quad |V_1(M)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$. \quad |\vec{M}_0\vec{M}| \leq \delta' \left(\frac{\varepsilon}{3} \right) \quad \text{إذا كان}$$

ويستج وجود δ' هنا من شرط التقارب المنتظم للتكامل (11) في النقطة M_0 . واختيار المنطقة T_1 يحدد المنطقة T_2 .

وحيث إن النقطة M_0 تقع خارج المنطقة T_2 فإن التكامل V_2 يعتبر دالة متصلة في هذه النقطة .

ومن هنا ينتج وجود $\delta''(\varepsilon/3)$ بحيث إن

$$|\vec{M}_0\vec{M}| \leq \delta'' \left(\frac{\varepsilon}{3} \right) \quad \text{عندما} \quad |V_2(M_0) - V_2(M)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

ويفرض أن

$$\delta(\varepsilon) = \min \{ \delta'(\varepsilon), \delta''(\varepsilon) \},$$

نحصل على

$$, \quad |\vec{M}_0\vec{M}| \leq \delta \quad \text{عندما} \quad |V(M) - V(M_0)| \leq \varepsilon$$

مما يعني اتصال التكامل المنتظم التقارب .

ونشير إلى أن النتائج التي حصلنا عليها صحيحة ليس للتكاملات المأخوذة على الحجم فحسب وإنما هي صحيحة أيضاً للتكاملات على السطوح والمنحنيات . وهذا الموضوع سنستخدمه في المستقبل .

ندرس التكامل

$$V(M) = \iiint_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}} d\tau_P \quad (12)$$

ومركبات قوة الجذب :

$$\left. \begin{aligned} X(M) &= - \int_T \int \frac{\rho(P)}{R_{MP}^3} (x - \xi) d\tau_P; \\ Y(M) &= - \int_T \int \frac{\rho(P)}{R_{MP}^3} (y - \eta) d\tau_P; \\ Z(M) &= - \int_T \int \frac{\rho(P)}{R_{MP}^3} (z - \zeta) d\tau_P \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

في النقط الواقعة داخل الجسم الجاذب T . تكون التكاملات المعتلة (12) .
(13) متقاربة إذا كانت الكثافة $\rho(M)$ محدودة $|\rho(M)| < C$. وللجهد $V(M)$ يكون ذلك واضحاً لأن

$$\frac{|\rho|}{R} < \frac{C}{R^\alpha} \quad (\alpha = 1 < 3).$$

ولمركبات قوة الجذب يتبع ذلك من المتباينة

$$\frac{|\rho|}{R^2} \frac{|x - \xi|}{R} < \frac{C}{R^\alpha} \quad (\alpha = 2 < 3),$$

لأن $|x - \xi| < R$.

ولتوضيح مفهوم التقارب المنتظم للتكاملات المعتلة نبين أن التكاملات (13) و (12) تعتبر دوال متصلة .

ولهذا الغرض يجب إثبات أن التكاملات (13) . (12) منتظمة التقارب في كل نقطة M_0 .

نحسب القيمة المطلقة للتكامل *

$$\left| \int_{T_0} \int \frac{\rho(P)}{R_{MP}} d\tau_P \right| \leq C \int_{K_{M_0}^{M_0}} \frac{d\tau_P}{R_{MP}},$$

حيث $K_{M_0}^{M_0}$ كرة نصف قطرها δ ومركزها في النقطة M_0 وتحتوى المنطقة T_0 .
غير أن حساب هذا التكامل على المنطقة $K_{M_0}^{M_0}$ التي مركزها في النقطة M_0 لا يكون

نشير إلى أن التكامل (12) يتبع من التكامل (11) عند $F(M, P) = 1/R_{MP}$, $f(P) = \rho(P)$

مريحاً . فلهساب التكامل الأخير يكون من الأنسب الانتقال إلى مجموعة الإحداثيات الكروية التي نقطة أصلها في النقطة M . ومن الواضح أن

$$\left| C \int \int \int_{K_0^M} \frac{d\tau_P}{R_{MP}} \right| \leq C \left| \int \int \int_{K_{2\delta}^M} \frac{d\tau_P}{R_{MP}} \right| = C 8\pi\delta^2,$$

حيث $K_{2\delta}^M$ كرة نصف قطرها 2δ ومركزها في النقطة M . وإذا أُعطينا عدداً ما $\varepsilon > 0$ واخترنا

$$\delta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi C}},$$

فإننا سنتأكد من التقارب المنتظم للتكامل V .

وبتكرار نفس التحليل السابق للتكامل :

$$X(M) = - \int_T \int \rho(P) \frac{x - \xi}{R_{MP}^3} d\tau_P,$$

نحصل على :

$$\left| \int \int \int \rho(P) \frac{x - \xi}{R_{MP}^3} d\tau_P \right| \leq C \left| \int \int \int_{K_0^M} \frac{d\tau_P}{R_{MP}^3} \right| \leq C \left| \int \int \int_{K_{2\delta}^M} \frac{d\tau_P}{R_{MP}^3} \right| = 8\pi\delta C \leq \varepsilon,$$

إذا كان

$$\delta \leq \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{8\pi C}.$$

وبذلك فإن الجهد V ومركبات قوة الجذب X, Y, Z تكون دوال متصلة في كل الفراغ* .

فقرة ٤ : المشتقات الأولى للجهد الحجمي . إن الدوال تحت علامة التكاملات

$$X(M) = - \int_T \int \rho(P) \frac{x - \xi}{R_{MP}^3} d\tau_P, \quad Y(M), \quad Z(M),$$

هي عبارة عن المشتقات بالمتغيرات المناظرة للدالة تحت علامة التكامل

* إن التقارب المنتظم للتكاملين $V(M), X(M)$ أثبت بفرض عمودية الكثافة $C > |\rho|$. وبالتالي فإن هذين التكاملين متصلان أيضاً عند نقط انفصال الدالة ρ . على سبيل المثال على حدود المنطقة المملوءة بالكل .

$$V(M) = \iiint_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}} d\tau_P.$$

وإذا كانت عملية التفاضل تحت علامة التكامل قانونية للدالة V فإن

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (14)$$

أى أن V يعتبر جهداً للمجال الذى مركباته تساوى X, Y, Z .

وإذا وقعت النقطة M خارج المنطقة T فإن الدالة :

$$-\frac{x-\xi}{R_{MP}^3} = \frac{-(x-\xi)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R_{MP}}$$

تكون متصلة بالنسبة إلى المتغيرين $P(\xi, \eta, \zeta)$, $M(x, y, z)$. وبالتالي ففى هذه الحالة يكون التفاضل تحت علامة التكامل V قانونياً .

والمشتقات من رتب أعلى يمكن حسابها أيضاً بواسطة التفاضل تحت علامة التكامل فى كل مكان خارج T . ومن هنا ووفقاً للمأخوذة الواردة فى الباب الثالث ، بند ٣ ينتج أن الجهد خارج الكتل الجاذبة يحقق معادلة لابلاس

$$\Delta V = 0 \quad \text{خارج } T.$$

نثبت أن حساب مشتقات الجهد V يمكن إجراؤه بواسطة التفاضل تحت علامة التكامل أيضاً عندما تكون النقطة M واقعة داخل الجسم T .

وعند الإثبات سنستعين فقط بكون الدالة $\rho(x, y, z)$ محدودة ($|\rho(x, y, z)| < C$) دون افتراض اتصالها ، ومن هنا سيتبع أن الدالة $V(x, y, z)$ قابلة للتفاضل فى نقاط الحدود التى يمكن اعتبارها نقطاً لانفصال الدالة $\rho(x, y, z)$ للمساوية للصفر خارج الجسم .

نوضح أنه لأى ϵ يمكن تعيين $\delta(\epsilon)$ بحيث إن

$$\left| \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} - X \right| < \epsilon,$$

إذا كان

$$|\Delta x| < \delta(s).$$

نحصر النقطة M_0 في كرة صغيرة بدرجة كافية $K_{\delta}^{M_0}$ سنلتق مقاييسها فيما بعد ،
ونقسم V إلى حدين :

$$V = V_1 + V_2,$$

حيث V_1, V_2 يناظران عملية التكامل على الحجم $T_1 = K_{\delta}^{M_0}$ وعلى الحجم
الإضافي $T_2 = T - K_{\delta}^{M_0}$. وعندئذ فإن :

$$\begin{aligned} \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} &= \\ &= \frac{V_1(x + \Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x} + \frac{V_2(x + \Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

ولأى مقاييس مثبتة للمنطقة T_1 يكون

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V_2(x + \Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x} = X_2 = \int_{T_2} \int \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau.$$

وذلك لأن النقطة M_0 تقع خارج المنطقة T_2 .

بوضع $X = X_1 + X_2$ نقدر المقادير

$$\begin{aligned} \left| X - \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} \right| &\leq \\ &\leq \left| X_2 - \frac{V_2(x + \Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x} \right| + |X_1| + \\ &\quad + \left| \frac{V_1(x + \Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x} \right| \end{aligned}$$

ونوضح أنه يمكن جعل كل حد أصغر من $\epsilon/3$. بالفعل

$$|X_1| = \left| \int_{T_1} \int \rho \frac{x - \xi}{R^3} d\tau \right| < C \int_0^{\delta} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr}{r^2} = 4\pi C\delta < \frac{\epsilon}{3},$$

(15)

وذلك لأن $\left| \frac{x-\xi}{R} \right| < 1$ ، $|\rho| < C$. ندرس الحد الأخير

$$|S| = \left| \frac{V_1(x+\Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x} \right| = \\ = \left| \frac{1}{\Delta x} \iiint_{T_1} \rho \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) d\tau \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \iiint_{T_1} \rho \frac{R - R_1}{RR_1} d\tau \right|,$$

حيث

$$R_1 = \sqrt{[(x+\Delta x) - \xi]^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

وأضلاع المثلث MM_1 تساوى $|\Delta x|$ ، r ، r_1 . ومن هنا ينتج أن

$$|R - R_1| \leq |\Delta x|.$$

ولذا فإن

$$|S| \leq C \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{RR_1} \leq C \frac{1}{2} \left\{ \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R_1^2} + \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R^2} \right\},$$

وذلك لأنه لأى عددين a ، b يكون

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

وعند ذلك فإن

$$\iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R^2} = 4\pi\delta' \quad , \quad \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R_1^2} \leq \iiint_{K_{2\delta}^{M_1}} \frac{d\tau}{R_1^2} = 8\pi\delta',$$

حيث $K_{2\delta}^{M_1}$ كرة نصف قطرها $2\delta'$ ومركزها في النقطة M_1 .

وبالاختيار المناسب للعدد δ' يمكن أن تكفل تحقق المتباينة

$$|S| < \frac{C}{2} 12\pi\delta' = 6\pi C\delta' < \frac{\epsilon}{3}. \quad (16)$$

باختيار δ' من الشرط (16) نحقق المتباينتين (16) و (15). والآن نقوم بتثبيت

المنطقة $T_1 = K_{\delta'}^{M_0}$ ومن ثم المنطقة $T_2 = T - T_1$.

التساوية (14) مطبقة على المنطقة المختارة T_2 تعني أنه لأي ε يمكن تعيين δ'' بحيث أن

$$\left| \frac{V_2(x + \Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x} - X_2 \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

بمجرد أن يكون $|\Delta x| < \delta''$. وأخيراً باختيار $\delta' = \min[\delta', \delta'']$ نحصل على :

$$\left| \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} - X \right| < \varepsilon,$$

إذا كان $|\Delta x| < \delta$. وبذلك أثبتنا وجود المشتقة $\frac{\partial V}{\partial x}$ التي تساوي

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X. \quad (17)$$

ولا تتطلب العلاقاتان

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z$$

إثباتاً خاصاً.

وهكذا أثبتنا أن التفاضل تحت علامة التكامل قانوني وأن مركبات مجال القوى X, Y, Z هي مركبات $\text{grad } V$.

فقرة ٥ : المشتقات الثانية للجهد الحجمي. إن التكامل المتعل

$$\iiint_T \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\tau_P = - \iiint_T \rho \left(\frac{1}{R^3} - 3 \frac{(x-\xi)^2}{R^5} \right) d\tau \quad (18)$$

لا يتقارب تقارباً مطلقاً للنقط الداخلية P في الجسم T . وفي هذه الحالة تكون الدالة الحد الأعظم (majorant) للدالة المكاملة على الصورة

$$\alpha = 3 \text{ عندما } \frac{C}{R^\alpha}$$

نثبت علاقات نحسب بها داخل T المشتقات الثانية للجهد V بافتراض الاتصال وقابلية التفاضل باتصال للكثافة $\rho(x, y, z)$ في جوار النقط محل البحث. وكحالة خاصة لا يكون البحث الجبري فيما سيلي قابلاً للتطبيق على النقط

الحدية حيث توجد - كقاعدة - للكثافة انفصالات .

نعبر عن الجهد V في صورة مجموع حدين

$$V = V_1 + V_2,$$

يتعلقان بالمنطقتين T_1 , T_2 حيث $T_1 = K_0^{M_0}$ كرة نصف قطرها δ ومركزها في النقطة محل الدراسة M_0 ودخل هذه الكرة تكون الدالة ρ قابلة للتفاضل .

ويمكن حساب المشتقة الثانية للجهد V_2 بالتفاضل تحت علامة التكامل لأن النقطة M_0 تقع خارج المنطقة T_2 :

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} \right) = \int \int \int_{T_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau.$$

والمشتقة الأولى للدالة V_1 بالنسبة إلى x تساوى

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int \int \int_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau = - \int \int \int_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau, \quad (19)$$

وذلك لأن

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right).$$

نحول التكامل (19) بالاستعانة بعلاقة أوستروجرادسكى

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial x} &= - \int \int \int_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau = - \int \int \int_{T_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right] d\tau = \\ &= - \int \int \int_{T_1} \frac{\rho}{R} \cos \alpha d\sigma + \int \int \int_{T_1} \frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\tau, \end{aligned}$$

حيث $\Sigma_0^{M_0}$ سطح الكرة الذى يحد الحجم T_1 ، α الزاوية بين العمود الخارجى على السطح $\Sigma_0^{M_0}$ والمحور x . والحد الأول عبارة عن دالة قابلة للتفاضل في النقطة M_0 لأن M_0 تقع خارج $\Sigma_0^{M_0}$. والحد الثانى فى جوار النقطة M_0 يعتبر أيضاً دالة قابلة للتفاضل لأن الدالة ρ لها مشتقة فى T_1 . ومن هنا

يتبع أنه في النقطة M_0 توجد مشتقة ثانية للدالة V_1 . نستقل إلى حسابها :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \right) = - \int \int_{\Sigma_0^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \alpha \, d\sigma + \int \int_{T_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \, d\tau.$$

وللمحد الثاني يتحقق في النقطة M_0 التقدير التالي :

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right| < C_1 \text{ إذا كان } \left| \int \int_{T_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \, d\tau \right| < C_1 \int \int_{T_1} \frac{d\tau}{R^2} = C_1 4\pi\delta \quad (20)$$

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على التكامل السطحي نحصل على :

$$- \int \int_{\Sigma_0^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \alpha \, d\sigma = - \int \int_{\Sigma_0^{M_0}} \rho \frac{\cos^2 \alpha}{R^2} \, d\sigma = - \rho^* \frac{4\pi}{3} ,$$

حيث ρ^* هنا هو قيمة الكثافة في نقطة ما من نقاط $\Sigma_0^{M_0}$ ،

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{x - \xi}{R^3} = - \frac{1}{R^2} \cos \alpha$$

وعلاوة على ذلك فإن

$$\int \int_{\Sigma_0^{M_0}} \frac{\cos^2 \alpha}{R^2} \, d\sigma = \frac{1}{3} \int \int_{\Sigma_0^{M_0}} \frac{1}{R^2} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \, d\sigma = \frac{4}{3} \pi.$$

ويعطى الانتقال إلى النهاية عندما $\delta \rightarrow 0$ ما يلي :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[- \int \int_{\Sigma_0^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \alpha \, d\sigma \right] = - \frac{4\pi}{3} \rho(M_0). \quad (21)$$

والمساوية

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}$$

صحيحة لأي δ وطرفها الأيسر لا يعتمد على δ ولذا فإن

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} \right) = - \frac{4\pi}{3} \rho(M) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \int_{T_1} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) \, d\tau. \quad (22)$$

ومن وجود المشتقة الثانية $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ المثبت فيما سبق يتبع وجود

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau. \quad (23)$$

والتكامل الأخير حصلنا عليه بطريقة خاصة للانتقال النهائي عندما تكون المناطق المضمحلة إلى النقطة M_0 كرات * ، وذلك ما أشرنا إليه بخط فوق علامة التكامل في العلاقة (23) . وتغير أشكال هذه المناطق بوجه عام يمكن أن يغير قيمة النهاية . ويجب اعتبار التكامل (23) بمثابة تكامل متقارب شرطيا . وبذلك فإن

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} (M_0) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau - \frac{4\pi}{3} \rho (M_0). \quad (24)$$

ومن هنا يتضح أن حساب المشتقات الثانية للجهد بواسطة التفاضل الشكلي تحت علامة التكامل كان سيؤدي بنا إلى نتيجة خاطئة .

وتتبع للمشتقتين $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ ، $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ صيغتان مائلتان . بالتعويض بقيم المشتقات الثلاث في صيغة مؤثر لابلاس نجد أن

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \rho \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R} \right) \right] d\tau - 4\pi \rho (M_0) = \\ &= -4\pi \rho (M_0). \end{aligned} \quad (25)$$

وذلك لأن $1/R$ حالة توافقية ** .

وبذلك يحقق الجهد الحجمي معادلة بواسون

$$\Delta V = -4\pi \rho \quad \text{داخل الجسم ،}$$

* تسمى النهاية (23) عادة بالقيمة الأساسية للتكامل .

** حصلنا على العلاقة (25) بفرض قابلية الدالة ρ للتفاضل وهو ما يعتبر شرطاً كافياً ويمكن استبداله بشروط أقل قوة أو أقل تعقيداً . غير أن شروط اتصال الدالة $\rho(M)$ ليست كافية لصحة العلاقة (25) لأنه توجد أمثلة للدوال متصلة $\rho(M)$ لا يوجد لجدها الحجمي مشتقات ثانية .

$$\Delta V = 0 \quad \text{خارج الجسم .}$$

والمعادلة اللامتجانسة

$$\Delta u = -f \quad (25')$$

بشرط قابلية الدالة f للتفاضل داخل منطقة ما T ، لها حل خاص

$$u_0 = \frac{1}{4\pi} \int \int_T \frac{f d\tau}{R}.$$

ومن هنا ينتج على وجه الخصوص أن حل المسألة الحدية للمعادلة اللامتجانسة (25') يمكن أن يؤول إلى حل مسألة حدية ممتثلة لمعادلة لابلاس $\Delta u = 0$ إذا عبرنا عن الدالة المجهولة في صورة المجموع $u = u_0 + v$

فقرة ٦ : الجهود السطحية . كما تبين علاقة جرين الأساسية

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) \right] d\sigma_P,$$

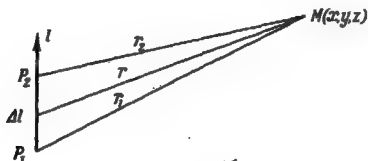
يمكن التعبير عن أية دالة توافقية بواسطة تكاملات تعتبر جهوداً سطحية .

ندرس مجالاً متكوناً بكتل موزعة على السطح* ، ونعين جهد هذا المجال . والكثافة السطحية $\mu(P)$ في النقطة P من نقط السطح Σ هي عبارة عن نهاية نسبة الكتلة الموجودة على عنصر سطح ما $d\sigma$ من السطح Σ يحتوى على النقطة P إلى مساحته عندما يضمحل $d\sigma$ ويؤول إلى النقطة P . وجهد هذه الكتل يعبر عنه بالتكامل السطحي

$$V(M) = \int \int_{\Sigma} \frac{\mu(P)}{R_{MP}} d\sigma_P. \quad (26)$$

* إذا كانت الكتل ذات الكثافة الحجمية ρ واقعة في طبقة ما سمكها h قرب السطح Σ وكان المجال يدرس على المسافات الكبيرة بالمقارنة مع h ($h/R \ll 1$) فلا يكون هناك معنى بوجه عام لأخذ السمك في الاعتبار . فبدلاً من الجهد الحجمي ذى الكثافة ρ من المناسب دراية الجهد السطحي ذى الكثافة السطحية $\mu = \rho h$

الذى يسمى بجهد الطبقة البسيطة أو طبقة الشحن (layer of charge) .
ويعتبر جهد الطبقة الثنائية (double layer) نوعاً آخر من أنواع الجهد
السطحي . ننتقل إلى تعريفه .



شكل ٥٩

ندرس ذا القطبين* للكون من الكتلتين $+m$ و $-m$ الواقعتين في النقطتين P_1 , P_2 على بعد Δl (شكل ٥٩) . وحاصل الضرب $m \cdot \Delta l = N$ يسمى بعزم ذى القطبين . وجهد ذى القطبين في نقطة ما $M(x, y, z)$ يساوى

$$V = \frac{m}{r_2} - \frac{m}{r_1} = m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = N \frac{1}{\Delta l} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

حيث r_1 , r_2 بعدا النقطة M عن النقطتين P_1 , P_2 .
وإذا كان Δl صغيراً بالمقارنة مع البعد عن النقطة M ($\Delta l/r_1 \ll 1$) فإننا
بالاستعانة بنظرية التغيرات المحدودة (نظرية لاجرانج) يمكننا أن نكتب :

$$V = N \frac{d}{dl} \left(\frac{1}{R} \right), \quad R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

حيث تؤخذ المشتقة بالاتجاه من الكتلة النافرة (الطاردة) إلى الكتلة الجاذبة ، R
بعد النقطة $M(x, y, z)$ عن نقطة ما وسطية $P(\xi, \eta, \zeta)$ على الجزء
الستقيم Δl .

• dipole : يعرف ذو القطبين بأنه مجموعة من شحنتين كهربائيتين أو من قطبين مغناطيسيين متساويي
المقدار ومختلفي الإشارة ، يكون البعد بينهما (الذراع) صغيراً بالمقارنة مع بعد مركز ذى القطبين عن نقط المجال
عمل الدراسة . (ملاحظة للترجم) .

نحسب المشتقة بالاتجاه l :

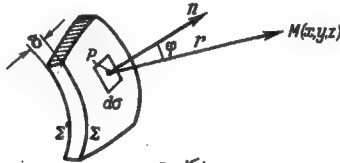
$$\frac{d}{dl} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R^2} \cos(r, l) = \frac{\cos \varphi}{R^2}$$

حيث المتجه r يتجه من ذى القطبين إلى النقطة المثبتة M ، φ هي الزاوية بين المتجه l والمتجه r . وبذلك فجهد ذى القطبين يساوى

$$V(M) = N \frac{\cos \varphi}{R^2}, \quad (27)$$

حيث N عزم ذى القطبين .

نفرض أنه على السطحين Σ , Σ' (شكل ٦٠) اللذين يبعدان عن بعضهما بمسافة صغيرة δ قد وزعت كتل بحيث إن كتلة كل عنصر من عناصر السطح



شكل ٦٠

تكون مساوية في المقدار ومختلفة في الإشارة مع كتلة عنصر السطح المناظر من عناصر السطح Σ . نرمز بالرمز μ إلى العمودى المشترك على السطحين Σ , Σ' المتجه من الكتل النافرة (الطاردة) إلى الجاذبة . وبالتنقال إلى النهاية عندما $\delta \rightarrow 0$ نحصل على الطبقة الثنائية كمجمل الطبقتين البسيطتين ذاتي الكثافتين المتضادتين اللتين تبعدان عن بعضهما بمسافة صغيرة . وإذا كانت ν هي الكثافة السطحية للعزم فإن عزم عنصر السطح $d\sigma_P$ سيكون مساوياً :

$$dN = \nu d\sigma_P;$$

ولجهد العنصر $d\sigma$ في النقطة $M(x, y, z)$ سنحصل على :

$$\nu \frac{d}{dn_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P = \nu(P) \frac{\cos \varphi_1}{R_{MP}^2} d\sigma_P,$$

حيث $\varphi_1 = (\widehat{n \overrightarrow{PM}})$.

نسمى التكامل

$$W(M) = - \int_{\Sigma} \int \frac{d}{dn_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) v(P) d\sigma_P \quad (28)$$

بجهد الطبقة الثنائية . ومن الواضح أن هذا التعريف يناظر تلك الحالة عندما تكون الناحية الخارجية للسطح نافرة والناحية الداخلية جاذبة .

ومن الواضح أن

$$W = \int_{\Sigma} \int \frac{\cos \varphi}{R_{MP}^2} v(P) d\sigma_P,$$

حيث φ الزاوية بين العمودى الداخلى والاتجاه من نقطة السطح P إلى النقطة المثبتة M . وإذا كان السطح غير مغلق فيجب أن نعتبره ذا ناحيتين لأن جهد الطبقة الثنائية يتحدد فقط لمثل هذه السطوح .

وجهدا الطبقتين البسيطة والثنائية في حالة المتغيرين يكونان على الصورة :

$$V = \int_C \mu(P) \ln \frac{1}{R_{MP}} ds, \quad (29)$$

$$W = - \int_C v(P) \frac{d}{dn_P} \left(\ln \frac{1}{R_{MP}} \right) ds = \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} v(P) ds, \quad (30)$$

حيث C منحنى ما ، μ الكثافة الخطية للطبقة البسيطة ، v كثافة عزم الطبقة الثنائية الخطية ، φ هي الزاوية بين العمودى الداخلى على المنحنى C والاتجاه إلى النقطة المثبتة .

وإذا كانت نقطة الملاحظة $M(x, y, z)$ موجودة خارج السطح (خارج الكتل الجاذبة) فإن الدوال المكاملة ومشتقاتها بالنسبة إلى x, y, z من أية رتبة في العلاقتين :

$$V(M) = \int_{\Sigma} \int \mu(P) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P, \quad W(M) = - \int_{\Sigma} \int v(P) \frac{d}{dn_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P$$

تكون دوال متصلة في المتغيرات x, y, z . ولذا ففي النقط الواقعة خارج السطح Σ ، يمكن حساب مشتقات الجهود السطحية بواسطة التفاضل تحت علامة التكامل. ومن هنا وفقاً لمبدأ التراكب يتبع أن الجهود السطحية تحقق معادلة لابلاس في كل مكان خارج الكتل الجاذبة. ومن الواضح أن الدالتين (30) و(29) تحققان معادلة لابلاس في المتغيرين المستقلين.

والجهود السطحية في نقط السطح Σ يعبر عنها بتكاملات معقدة. نوضح أنه إذا كان للسطح إنحناء (تقوس) متصل فإن جهد الطبقة الثابتة في نقط هذا السطح يكون موجوداً. نجري الإثبات لحالة المتغيرين المستقلين :

$$W = \int_G \frac{\cos \varphi}{R} v ds.$$

ندرس منحنى على المستوى (x, y) ونختار نقطة الأصل في النقطة P ونمد المحور x على امتداد المماس والمحور y على امتداد العمودي في هذه النقطة (شكل ٦١). ومعادلة المنحنى في جوار ما للنقطة P تكتب على الصورة :

$$y = y(x).$$

وللمنحنى وفقاً للتعريف إنحناء متصل أى أن $y(x)$ لها مشتقة ثانية متصلة. ولذا فإن

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2} y''(\theta x) \quad (0 \leq \theta \leq 1),$$

ومن هنا ونتيجة لاختيار محوري الإحداثيات نجد أن

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 y''(\theta x).$$

ومن هنا نحصل على :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^4 \left[\frac{y''(\theta x)}{2} \right]^2} = x \sqrt{1 + x^2 \left[\frac{y''(\theta x)}{2} \right]^2}.$$

$$\cos \varphi = \frac{y}{R} = \frac{xy''(\theta x)}{2 \sqrt{1 + x^2 \left[\frac{y''(\theta x)}{2} \right]^2}},$$

$$\frac{\cos \Phi}{R} = \frac{y''(\Phi x)}{2 \left\{ 1 + x^2 \left[\frac{y''(\Phi x)}{2} \right]^2 \right\}^{3/2}}.$$

ومن صيغة الانحناء $K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ يتج أن $y''(0) = K(P)$ ولذا فإن

$$\lim_{MP \rightarrow 0} \frac{\cos \Phi}{R} = \frac{1}{2} K(P),$$

بما يثبت اتصال $\frac{\cos \Phi}{R}$ على امتداد القوس ومن ثم وجود جهد الطبقة الثنائية في نقط المنحنى C للدالة المحدودة v .

وجهد الطبقة الثنائية في حالة المتغيرات الثلاثة المستقلة أيضاً يكون موجوداً في نقط السطح ذات الانحناء المحدود لأن الدالة $\frac{\cos \Phi}{R^2}$ لها انفراد قابل للتكامل من الرتبة $1/R$. ولا يؤثر وجود جهد الطبقة البسيطة أية شكوك.

لمرة ٧: سطح ومنحنيات ليايرونوف. يتضح أن اشتراط محدودية الانحناء لوجود الجهود السطحية يكون زائفاً عن الحاجة.

إن جهدي الطبقتين الثنائية والبسيطة في نقط السطح Σ يختار تكاملين-مطلين. نبين أن هذين التكاملين يتقاربان لفصل معين من السطح تسمى بـ سطح ليايرونوف. إذا كانت كثافة الجهد حالة محدودة $|v(P)| < C$ حيث C ثابت ما.

ويسمى السطح بـ سطح ليايرونوف إذا تحققت الشروط التالية :

- ١- في كل نقطة من نقط السطح Σ يوجد عمودى معرف (مستوى تماس).
- ٢- يوجد ذلك العدد $d > 0$ بحيث إن المستقيمت الموازية للعمودى على السطح Σ في نقطة معينة P لا تقطع أكثر من مرة واحدة الجزء Σ_d من السطح Σ الواقع داخل كرة نصف قطرها d ومركزها P . وأجزاء السطح هذه Σ_d تسمى بمجارات ليايرونوف.
- ٣- الزاوية $\gamma(P, P') = (\pi_{P, P'})$ المتكونة بين العموديين في النقطتين P, P' تحقق الشرط التالي :

$$\gamma(P, P') < Ar^{\delta}. \quad (31)$$

حيث r البعد بين النقطتين P, P' و A ثابت ما و $0 < \delta \leq 1$.

نفرض أن P_0 نقطة ما من نقط السطح Σ . نختار مجموعة الإحداثيات المتعامدة بوضع نقطة الأصل عند النقطة P_0 وتوجيه المحور x في اتجاه العمودى الخارجى. وينطبق المستوى (x, y) عندئذ على المستوى المماس. وتبعا للشرط ٢ يوجد P_0 بحيث إن معادلة السطح Σ يمكن التعبير عنها في الصورة :

$$z = f(x, y) \quad (32)$$

حالة

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \rho_0 \quad (33)$$

نرمز بالرمز Σ_{P_0} لجوار النقطة P_0 على السطح Σ والمعروف بالشروط (32) و (33). ثبت بعض التقديرات للدالة $f(x, y)$ ومشتقاتها.

من وجود العمودى في كل نقطة من نقط السطح (الشروط 1) نتج قابلية الدالة $f(x, y)$ للتفاضل. وجوب التمام الاتجاهية للعمودى (الخارجى) تعطى بالصيغ:

$$\cos \alpha = \frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}; \quad \cos \beta = \frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

وتبعاً لاختيار مجموعة إحداثياتنا يكون $z_x(P_0) = 0$, $z_y(P_0) = 0$. ونستنتج أن السطح Σ_{P_0} صغير (بنفس درجة صفر ρ_0) لدرجة أن

$$1 \geq \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} > \frac{1}{2}. \quad (34)$$

نرمز بالرمز α' إلى مسقط المتجه α على المستوى (x, y) وبالرمزين α' , β' إلى الزاويتين اللتين يصنعهما المتجه α' مع المحورين x , y . من الواضح أن

$$\cos \alpha = \sin \gamma \cos \alpha', \quad \cos \beta = \sin \gamma \sin \alpha'.$$

وحيث إن $\gamma < \pi$ فإنه وفقاً للشروط 3 يكون

$$\sin \gamma < Ar_{PP_0}^{\delta}$$

وبالتالى

$$|\cos \alpha| < Ar_{PP_0}^{\delta} |\cos \beta| < Ar_{PP_0}^{\delta} \quad (35)$$

وحيث إن $\frac{1}{\cos \gamma} < 2$ علماً بأن $z_x = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}$, $z_y = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}$ فإن

$$|z_x| < 2Ar_{PP_0}^{\delta} \quad |z_y| < 2Ar_{PP_0}^{\delta}$$

نشير إلى أنه إذا كانت للدالة $f(x, y)$ مشتقات ثانية متصلة في جوار النقطة P_0 فإن السطح $z = f(x, y)$ يحقق شروط ليابونوف. وبذلك فإن السطوح ذات الانحناء التصل تكون سطوح ليابونوف.

وبالاستمارة بمعلقة (مفكوك) تلور للدالة $z = f(x, y)$ في جوار النقطة $P_0(0, 0)$ نحصل على :

$$z(x, y) = z(0, 0) + xz_x(\bar{x}, \bar{y}) + yz_y(\bar{x}, \bar{y}),$$

حيث $0 \leq \bar{x} \leq x$, $0 \leq \bar{y} \leq y$ ومن هنا ينتج أن

$$|z(x, y)| < 4AR_{P_0}^{1+\delta} \quad (36)$$

والتقديران التامان (36), (34) يكفلان إثبات أن جهد الطبقة الثنائية

$$W(M) = \iint_{\Sigma} \frac{\cos \varphi}{R_{MP}^2} v(P) d\sigma_P \quad (28)$$

في النقط الواقعة على السطح Σ يكون تكاملاً معتلاً مقارباً إذا كان Σ سطح لايبنوف. نفرض أن P_0 هي نقطة من نقط السطح Σ . باختيار مجموعة الإحداثيات كما سبق نعبّر عن معادلة السطح Σ في جوار النقطة P_0 على الصورة :

$$z = f(x, y).$$

الدالة $f(x, y)$ تحقق الشرطين (36), (34). نجيب $\cos \varphi$ حيث φ الزاوية بين اتجاه العمود الداخلي في النقطة $P(\xi, \eta, \zeta)$ واتجاه \vec{PP}_0 . وليس من الصعب ملاحظة أن :

$$|\cos \varphi| = \left| \frac{\xi}{R} \cos \alpha + \frac{\eta}{R} \cos \beta + \frac{\zeta}{R} \cos \gamma \right| < |\cos \alpha| + |\cos \beta| + \frac{|\zeta|}{R} < AR_{P_0}^{\delta} + AR_{P_0}^{\delta} + 4AR_{P_0}^{\delta} = 6AR_{P_0}^{\delta}$$

وأن

$$\left| \frac{\cos \varphi}{R^2} \right| < 6A \frac{1}{R^{2-\delta}} \quad (0 < \delta \leq 1). \quad (37)$$

نعبّر عن W في صورة مجموع تكاملين

$$W = W_1 + W_2$$

حيث W_1 تكامل مأخوذ على السطح Σ_{P_0} الذي يحوي النقطة المفردة P_0 والتكامل W_2 يؤخذ على الجزء الباقي من السطح $\Sigma - \Sigma_{P_0}$. وحيث إن الدالة المكاملة في التكامل W_2 لا تتوّل إلى المالا نهاية فإنه لتقارب التكامل W يكفي التأكد من تقارب التكامل W_1 . وحيث إن

$$d\sigma = \frac{d\xi d\eta}{\cos \gamma} = \frac{\rho d\rho d\theta}{\cos \gamma},$$

حيث $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, θ الإحداثيان القطبيان في المستوى (x, y) فإن تحويل المتغيرات في هذا التكامل يعطى :

$$W_1 = \int_{\Sigma_{P_0}} \int \frac{\cos \varphi}{R_{PP_0}^2} v(P) d\sigma_P = \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{R_{PP_0}^2} v(P) \frac{1}{\cos \gamma} \rho d\rho d\theta.$$

وللمتلة المكاملة نحصل وفقاً للتقديرات (37) ، (36) ، (34) على :

$$\left| v(P) \frac{\cos \varphi}{R^2} \frac{1}{\cos \gamma} \right| \leq \bar{F} = \frac{12AC}{\rho^2 - \delta}.$$

لأن $\rho \leq R$.

وهذه الصورة لدالة الحد الأعظم \bar{F} تكفل تقارب التكامل المُعطل في حالة التقديرين المسجلين (انظر فقرة ٣).

وليس من الصعب إثبات أنه لسطح لايونوف يتقارب أيضاً جهد الطبقة البسيطة

$$V(M) = \int_{\Sigma} \int \frac{1}{R_{MP}} \mu(P) d\sigma_P \quad (26)$$

في نقط السطح. وينبغي الإشارة إلى أن هذا التقارب يتحقق أيضاً لسطوح من فصيلة أوسع.

وفي حالة التقديرين المسجلين يتقارب جهدا الطبقتين الثنائية والبسيطة في نقط للنحن (انظر العلاقات (30) ، (29) إذا كان هذان الجهدان يؤخذان على منحنيات لايونوف للفرقة بشروط مشابهة للشروط ١-٣ التي تعرّف سطح لايونوف.

فقرة ٨ : انفصال جهد الطبقة الثنائية. نوضح أن جهد الطبقة الثنائية في نقطة ما P_0 واقعة على السطح Σ تكون دالة منفصلة تتحقق لها العلاقتان

$$\left. \begin{aligned} W_1(P_0) &= W(P_0) + 2\pi v(P_0), \\ W_e(P_0) &= W(P_0) - 2\pi v(P_0), \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

حيث $W_1(P_0)$ القيمة النهائية (the limiting value) لجهد الطبقة الثنائية عند الاقتراب إلى النقطة P_0 من الناحية الداخلية ، $W_e(P_0)$ القيمة النهائية عند الاقتراب إلى النقطة P_0 من الناحية الخارجية*.

* إذا كان السطح Σ غير مغلق فإن الناحية الداخلية يمكن أن تعرف اصطلاحياً بالاتفاق على أى عمودى بالذات على السطح في النقطة P_0 يعتبر «داخلياً» وأى عمودى يعتبر «خارجياً». ويجب الأخذ في الاعتبار أنه في حالة السطح غير المغلقة يعرف جهد الطبقة الثنائية فقط للسطوح ذات الناحيتين.

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع داخل المنحنى } C \\ \pi \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع على المنحنى } C \\ 0 \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع خارج المنحنى } C \end{array} \right\} = \Omega$$

عندما تتحرك النقطة P على كل المنحنى C . ومن هنا فالجهد W^0 نحصل على :

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi v_0 \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع داخل المنحنى } C \\ \pi v_0 \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع على المنحنى } C \\ 0 \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع خارج المنحنى } C \end{array} \right\} = v_0 \Omega = W^0$$

وبذلك فإن الجهد بالكثافة الثابتة يعتبر حالة متقطعة الثبات علمًا بأن

$$\left. \begin{array}{l} W_1^0 = W_0^0 + \pi v_0 \\ W_2^0 = W_0^0 - \pi v_0 \end{array} \right\} \quad (41)$$

حيث W_1^0, W_2^0, W_0^0 قيم الجهد داخل وعلى وخارج C .
وبالمثل في حالة المتغيرات الثلاثة سنحصل على :

$$\frac{d\sigma \cos \varphi}{R^3} = d\omega, \quad (42)$$

حيث $d\omega$ الزاوية المجسمة التي يرى بها العنصر $d\sigma$ من عناصر السطح Σ .
نفرض أن $d\sigma'$ عنصر السطح الكروي الناتج بتقاطع الكرة التي نصف قطرها MP المرسومة حول M مع المخروط الذي رأسه في النقطة M والمركّز على عنصر السطح $d\sigma$.
وعنصر السطح $d\sigma' = d\sigma \cos \varphi$. ومن هنا نتج العلاقة (42) .
وتسرى الملاحظة الواردة أعلاه المتعلقة بإشارة $d\omega$ فتحفظ بصحتها في هذه الحالة أيضًا مما يؤدي إلى العلاقات :

$$\left. \begin{array}{l} 4\pi v_0 \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع داخل السطح } \Sigma \\ 2\pi v_0 \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع على السطح } \Sigma \\ 0 \text{ إذا كانت النقطة } M \text{ تقع خارج السطح } \Sigma \end{array} \right\} = v_0 \Omega = W^0$$

وهذه العلاقات تميز الدالة W^0 المنقطعة الثبات . وكذلك نتوصل إلى العلاقتين

$$\left. \begin{aligned} W_1^0 &= W_2^0 + 2\pi v_0, \\ W_0^0 &= W_2^0 - 2\pi v_0. \end{aligned} \right\} \quad (41')$$

حيث W_0^0 . W_1^0 قيمتا الجهد W^0 داخل وخارج السطح Σ ، W_2^0 قيمة W^0 على Σ .

ندرس الآن جهد الطبقة الثنائية ذات الكثافة المتغيرة ونثبت أنه في نقط اتصال الكثافة تتحقق علاقات مشابهة للعلاقات (41') ، (41) .

نفرض أن P_0 نقطة من نقط السطح Σ حيث تكون فيها الدالة $v(P)$ متصلة . نأخذ جهد الطبقة الثنائية W^0 ذات الكثافة الثابتة $v_0 = v(P_0)$ وندرس الدالة

$$I(M) = W(M) - W^0(M) = \iint_{\Sigma} [v(P) - v_0] \frac{\cos \varphi}{R_{MP}^2} d\sigma_P.$$

نثبت أن الدالة I متصلة في النقطة P_0 . ولهذا الغرض يكفي إثبات التقارب المنتظم للتكامل $I(M)$ في النقطة P_0 . نضع أمامنا عدداً ما $\varepsilon > 0$. من اتصال الدالة $v(P)$ في النقطة P_0 ينتج أنه لأي عدد معطى مسبقاً $\eta > 0$ يمكن تعيين Σ_1 - جوار للنقطة P_0 على السطح Σ - بحيث أن

$$|v(P) - v(P_0)| < \eta.$$

إذا كان $P \in \Sigma_1$. نعبّر عن التكامل I في صورة المجموع

$$I = I_1 + I_2,$$

حيث التكامل I_1 يؤخذ على السطح Σ_1 و I_2 يؤخذ على $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$. من تعريف Σ_1 ينتج أن

$$|I_1| < \eta B_{\Sigma_1},$$

حيث B_{Σ_1} ثابت يحدد بالشرط :

$$\iint_{\Sigma} \frac{|\cos \varphi|}{R_{MP}^2} d\sigma_P \leq B_{\Sigma} \quad (43)$$

عند كل الأوضاع المحتملة للنقطة M ولا يعتمد على اختيار السطح Σ_1 . وسوف نورد تفاصيل أكثر حول هذا الثابت فيما بعد.

باختيار $\eta = \varepsilon/Bz$ نتأكد من أنه لأي عدد $\varepsilon > 0$ يمكن تعيين Σ_1 الذي يحتوي P_0 بحيث يكون

$$|I_1(M)| < \varepsilon$$

لأي وضع للنقطة M . ومن هنا ينتج التقارب المنتظم للتكامل $I(M)$ في النقطة P_0 وكذلك اتصاله في هذه النقطة.

وإذا كان $W_i(P_0)$ و $W_e(P_0)$ نهايتي الجهد $W(M)$ عندما $M \rightarrow P_0$ من الناحيتين الداخلية والخارجية للسطح Σ فإن :

$$W_i(P_0) = W_i^0(P_0) + I(P_0) = W^0(P_0) + I(P_0) + 2\pi v_0 = W(P_0) + 2\pi v(P_0)$$

وبالمثل

$$W_e(P_0) = W(P_0) - 2\pi v(P_0).$$

وهكذا أثبتنا صحة العلاقتين (38).

والإثبات الوارد أعلاه صحيح للسطوح التي تحقق شرط المحدودية (43). وللسطح المحدب الذي لا يقطعه أي شعاع خارج من النقطة M أكثر من مرتين يكون $Bz \leq 8\pi$ ، وللسطوح للتكون من عدد محدود من الأجزاء المحدبة يكون Bz محدوداً أيضاً. وبذلك فإن إثباتنا يتعلق بفصل واسع للغاية من السطوح.

وكل التحليلات الجبراء فيما سبق تحتفظ بصحتها في حالة المتغيرين المستقلين. وفي هذه الحالة تأخذ العلاقتان (41) الصورة :

$$W_i(P_0) = W(P_0) + \pi v(P_0),$$

$$W_e(P_0) = W(P_0) - \pi v(P_0).$$

فقرة ٩ : خواص جهد الطبقة البسيطة. إن جهد الطبقة البسيطة

$$V(M) = \iint_{\Sigma} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P) d\sigma_P \quad (26)$$

على خلاف جهد الطبقة الثنائية ، يكون متصلاً في كل نقط السطح Σ .
ولتأكد من ذلك لحالة السطح الأملس Σ . ولهذا الغرض يكفي إثبات التقارب
المنتظم للتكامل $V(M)$ في نقط السطح Σ .

بالفعل . نفرض أن P_0 نقطة ما من السطح Σ ونعبر عن الجهد V في
صورة المجموع :

$$V = \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P) d\sigma_P + \iint_{\Sigma_2} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P) d\sigma_P = V_1 + V_2,$$

حيث Σ_1 جزء صغير بدرجة كافية من السطح Σ يحتويه سطح كروي نصف
قطره δ ومركزه في النقطة P_0 . وسنعرف المقدار δ بدقة أكثر فيما بعد .

ندرس مجموعة الإحداثيات التي نقطة أصلها في النقطة P_0 والمحور z فيها
يتجه في اتجاه العمودى الخارجى عند P_0 . نفرض أن $M(x, y, z)$ نقطة
اختيارية تبعد عن $P_0(0, 0, 0)$ بمسافة $MP_0 < \delta$. نرمز بالرمز Σ_1' إلى مسقط
 Σ_1 على المستوى (x, y) وبالرمز $K_{2\delta}^M$ إلى الدائرة التي نصف قطرها 2δ ومركزها
في النقطة $M'(x, y, 0)$ والتي تحتوى كلية على المنطقة Σ_1' . وبفرض محدودية
اللالة

$$|\mu(P)| < A$$

والأخذ في الاعتبار أن

$$d\sigma = \frac{d\sigma'}{\cos \gamma} = \frac{d\xi d\eta}{\cos \gamma}$$

و

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\xi)^2} \geq \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = \rho,$$

نحصل على :

$$\begin{aligned} |V_1(M)| &< A \iint_{\Sigma_1} \frac{d\sigma}{R_{MP}} = A \iint_{\Sigma_1} \frac{d\sigma'/\cos \gamma}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\xi)^2}} \leq \\ &\leq 2A \iint_{\Sigma_1'} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \leq 2A \iint_{K_{2\delta}^M} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \end{aligned}$$

إذا كان δ صغيراً لدرجة أن $\cos \varphi > 1/2$.

ندرج في المستوى (x, y) مجموعة الإحداثيات القطبية (ρ, φ) التي نقطة أصلها عند النقطة M' . عندئذ يمكننا أن نكتب :

$$|V_1(M)| < 2A \iint_{R_{2\delta}^{M'}} \frac{d\xi d\eta}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = 2A \int_0^{2\delta} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho} = 8.4\pi\delta.$$

وباختيار $\delta = \epsilon/8\pi A$ سنحصل على :

$$|V_1(M)| < \epsilon.$$

إذا كان $\delta < MP_0$. وبالتالي فإن $V(M)$ يتقارب بانتظام في أية نقطة $P_0 \in \Sigma$ ويعتبر دالة متصلة في هذه النقطة.

نتقل الآن إلى دراسة سلوك المشتقات العمودية لجهد الطبقة البسيطة على السطح. نبين أنه يكون لها على Σ انفصال من نفس نوع انفصال جهد الطبقة الثنائية.

المشتقتان العمودية الخارجية والداخلية (بالعموديين الخارجى والداخلى) للـ V وهما $\frac{dV}{dn_i}$ و $\frac{dV}{dn_e}$ تعيينان كما يلى. نفرض أن P_0 نقطة ما على السطح Σ . من النقطة P_0 نمد المحور z الذى يمكن توجيهه إما في اتجاه العمودى الخارجى أو في اتجاه العمودى الداخلى.

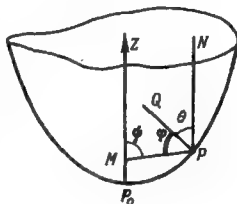
ندرس المشتقة $\frac{dV}{dz}$ في نقطة ما M على المحور z . نرمز بالرمزين $(\frac{dV}{dz})_i$ و $(\frac{dV}{dz})_e$ إلى نهايتى المشتقة $\frac{dV}{dz}$ عندما تؤول النقطة M إلى النقطة P_0 من الناحية الداخلية أو الخارجية للسطح Σ . وإذا كان المحور z متجهاً في اتجاه العمودى الخارجى (الداخلى) فإن هاتين القيمتين تسميان بالقيمتين النهائيتين الداخلية والخارجية للمشتقة بالعمودى الخارجى (الداخلى) في النقطة P_0 *.

* نهاية النسبة الفرقية $\frac{V(M) - V(P_0)}{MP_0}$ عندما $M \rightarrow P_0$ تساوى النهاية من الخارج للمشتقة بالعمودى الخارجى أو النهاية من الداخل للمشتقة بالعمودى الداخلى وفقاً للناحية التى تقرب منها النقطة M إلى النقطة P_0 .

نبحث انفصالات المشتقة العمودية الداخلية لجهد الطبقة البسيطة على Σ .
المشتقة $\frac{dV}{dz}$ في النقطة M على المحور z المتجه في اتجاه العمودى الداخلى
تساوى :

$$\frac{dV}{dz}(M) = \int_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P = \int_{\Sigma} \frac{\cos \psi}{R_{MP}^2} \mu(P) d\sigma_P, \quad (44)$$

حيث ψ الزاوية بين المحور z والمتجه \vec{MP} . نمد من النقطة P (شكل ٦٣) العمودى PQ والمستقيم PN الموازى للمحور z (العمودى في النقطة P_0) ونرمز بالحرف θ إلى الزاوية NPQ المساوية للزاوية بين العمودين في النقطتين P, P_0 .
وصيغة جهد الطبقة الثنائية $W(M)$



شكل ٦٣

تحتوى على المعامل $\frac{\cos \psi}{R^2}$ حيث $\varphi = \angle MPQ$. وحيث إن الزاوية MPN تساوى $\pi - \psi$ فإن

$$\cos(\pi - \psi) = \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta \cos \Omega = -\cos \psi,$$

حيث Ω الزاوية الزوجية (زاوية المستويين dihedral angle) ذات الضلع PQ . ومن هنا يتبع أن

من الواضح أن θ و $\sin \theta$ تؤولان إلى الصفر عندما $P \rightarrow P_0$. وإذا كان للسطح انتهاء محدود في جوار النقطة P_0 أى يمكن التعبير عن معادلته في الصورة $z = f(x, y)$ حيث $f(x, y)$ لها مشتقات ثانية. فإن $\sin \theta$ تكون دالة قابلة للتفاضل بالتغيرين x, y وبالتالي يكون

$$\sin \theta < Ar$$

(لسطح ليايبنوف $(\sin \theta < Ar)$).

•• إذا اعتبرنا اتجاه PQ هو محور مجموعة إحداثيات كروية جديدة فإن هذه العلاقة ستطبق على العلاقة (18) صفحة ٣٨٤.

$$\frac{\partial V}{\partial z}(M) = - \int_{\Sigma} (\mu \cos \theta) \frac{\cos \varphi}{R^3} d\sigma - \int_{\Sigma} \mu \sin \theta \cos \Omega \frac{\sin \varphi}{R^3} d\sigma =$$

$$= -W_1 - I(M), \quad (45)$$

حيث $W_1(M)$ - جهد الطبقة الثنائية ذات الكثافة $\mu_1 = \mu \cos \theta$ الذى له انفصال على السطح Σ ، ومن الواضح أن التكامل $I(M)$ يعتبر دالة متصلة فى النقطة P_0 لأن $I(M)$ يتقارب بانتظام فى هذه النقطة .
وبالعودة إلى العلاقة (45) نرى أن

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_i &= -W_1(P_0) - 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0), \\ \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_e &= -W_1(P_0) + 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

ندرج الرمز :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_0 = -W_1(P_0) - I(P_0) =$$

$$= \left[- \int_{\Sigma} (\mu \cos \theta) \frac{\cos \varphi}{R^3} d\sigma - \int_{\Sigma} \mu \sin \theta \cos \Omega \frac{\sin \varphi}{R^3} d\sigma \right]_{M=P_0} =$$

$$= - \int_{\Sigma} \mu \frac{\cos \psi_0}{R_{P_0 P}^3} d\sigma,$$

حيث ψ_0 الزاوية بين المحور z والمتجه $\vec{P_0 P}$.

وبملاحظة أن $\mu_1(P_0) = \mu(P_0)$ نجد أن :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial n_i} \right)_i &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_i} \right)_0 - 2\pi\mu(P_0), \\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_i} \right)_e &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_i} \right)_0 + 2\pi\mu(P_0). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

وذلك لأن المحور z يتجه وفقاً للفرض فى اتجاه العمودى الداخلى . وإذا اتجه المحور z فى اتجاه العمودى الخارجى فإن $\cos \psi$ يغير إشارته ونحصل على :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial n_e} \right)_i &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_e} \right)_0 + 2\pi\mu(P_0), \\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_e} \right)_e &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_e} \right)_0 - 2\pi\mu(P_0). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

ولحالة المتغيرين تكون صحيحة علاقات مماثلة مع تغيير 2π إلى π .

فقرة ١٠ : تطبيق الجهود السطحية لحل المسائل الحدية . تكفل طريقة فصل المتغيرات وطريقة دالة المصدر الحصول على صيغة صريحة لحل المسائل الحدية فقط في حالة المناطق البسيطة الشكل . إن تحويل المسائل الحدية لمعادلة لابلاس (أو بواسون) بواسطة الجهود السطحية إلى معادلات تكاملية هو من ناحية يكون مناسباً للبحث النظري لمسألة قابلية حل ووحداية المسائل الحدية ، ومن ناحية أخرى يعطى إمكانية الحل العددي الفعال للمسائل الحدية في حالة المناطق ذات الشكل المعقد . ندرس المسائل الحدية الداخلية لمنحنى ما C :

عين الدالة u التوافقية في المنطقة T المحدودة بالمنحنى C بحيث تحقق على C الشروط الحدية

$$u|_C = f \quad (\text{المسألة الحدية الأولى})$$

أو

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_C = f \quad (\text{المسألة الحدية الثانية}).$$

وبالتل تصاغ المسائل الحدية الخارجية* .

سنبحث عن حل المسألة الحدية الداخلية الأولى في صورة جهد الطبقة الثنائية

$$W(M) = \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} v(P) ds_P = - \int_C \frac{d}{dn_P} \left(\ln \frac{1}{R_{MP}} \right) v(P) ds_P.$$

عند أى اختيار للدالة $v(P)$ تحقق الدالة $W(M)$ معادلة لابلاس داخل C ، والدالة $W(M)$ منفصلة على المنحنى C . ولتحقق الشرط الحدى من الواضح أنه يجب أن يكون

$$W_i(P_0) = f(P_0).$$

بالأخذ في الاعتبار العلاقة (39) نحصل على معادلة لتعيين الدالة $v(P)$:

$$\pi v(P_0) + \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{P_0P}} v(P) ds_P = f(P_0). \quad (49)$$

* . في صياغة المسألة الحدية الثانية سواء الداخلية أو الخارجية سنحير العمودى . في الشروط الحدية ،
داخليا.

وإذا رمزنا بالرمزين s , s_0 إلى قوسى المنحنى C المناظرين للنقطتين P , P_0 فإن المعادلة (49) يمكن كتابتها فى الصورة :

$$\pi v(s_0) + \int_0^L K(s_0, s) v(s) ds = f(s_0), \quad (50)$$

حيث L طول المحيط C و

$$K(s_0, s) = -\frac{d}{dn_P} \left(\ln \frac{1}{R_{PP_0}} \right) = \frac{\cos \varphi}{R_{PP_0}} \quad (51)$$

نواة هذه المعادلة التكاملية التى تعتبر معادلة تكاملية من نمط معادلة فريد هولم التكاملية من النوع الثانى * . وللمسألة الخارجية تتج معادلة مماثلة

$$-\pi v(s_0) + \int_0^L K(s_0, s) v(s) ds = f(s_0). \quad (52)$$

وللمسألة الحدية الثانية تتج المعادلتان :

$$-\pi \mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s) \mu(s) ds = f(s_0) \quad (\text{المسألة الداخلية}) \quad (53)$$

$$\pi \mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s) \mu(s) ds = f(s_0) \quad (\text{المسألة الخارجية}) \quad (54)$$

حيث **

$$K_1(s_0, s) = \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \left(\ln \frac{1}{R_{PP_0}} \right) = \frac{\cos \varphi_0}{R_{PP_0}} \quad (55)$$

• المعادلات التكاملية التى تحوى على تكاملات ذات حدود ثابتة تسمى معادلات فريد هولم :

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad \text{من النوع الأول}$$

$$\varphi(x) + \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad \text{من النوع الثانى}$$

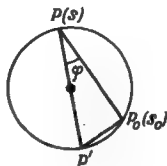
•• لا يصعب ملاحظة أن $K(s_0, s) = K_1(s, s_0)$ ومثل هذه النوى تسمى مترافقة والمعادلات المناظرة لها تسمى بالمعادلات التكاملية المترافقة .

إذا كنا نبحث عن حلها في صورة جهد الطبقة البسيطة :

$$u(M) = \int_C \ln \frac{1}{R_{MP}} \mu(P) ds_P.$$

والمسائل المتعلقة بقابلية هذه المعادلات للحل سندرسها في فقرة ١١ من هذا البند .

ندرس المسائل الحدية لبعض المناطق البسيطة الشكل التي توجد لها معادلات تكاملية قابلة للحل بسهولة .



شكل ٦٤

١ - المسألة الحدية الأولى للدائرة . إذا

كان للنحنى C عبارة عن دائرة نصف قطرها R فإن العمودى الداخلى في النقطة P يتجه في اتجاه القطر ويكون

$$\frac{\cos \varphi}{R_{PP_0}} = \frac{1}{2R}.$$

لأن φ هي الزاوية POP_0 (شكل ٦٤) . والمعادلة التكاملية للدالة v تأخذ الصورة :

$$v(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \frac{1}{2R} v(s) ds = \frac{1}{\pi} f(s_0). \quad (56)$$

ولا يصعب التحقق من أن حلها هو الدالة

$$v(s) = \frac{1}{\pi} f(s) + A, \quad (57)$$

حيث A ثابت ما ستعيه فيما بعد . بالتعويض بالصورة المقترحة للحل في المعادلة (56) نحصل على :

$$\frac{1}{\pi} f(s_0) + A + \frac{1}{\pi} \int_C \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{\pi} f(s) + A \right) ds = \frac{1}{\pi} f(s_0).$$

ومن هنا نعين للثابت A صيغة بدلالة الدالة المعطاة :

$$A = -\frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s) ds.$$

وبذلك فإن

$$v(s) = \frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_0 f(s) ds \quad (58)$$

هو حل المعادلة التكاملية (56).

وجهد الطبقة الثنائية المناظر يساوى

$$W(M) = \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} v(P) ds_P = \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} \left[\frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_0 f(s) ds \right] ds.$$

نحول الطرف الأيمن للعلاقة السابقة بفرض أن M تقع داخل C :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} f(s) ds - \left(\frac{1}{4\pi^2 R} \int_0 f(s) ds \right) \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} f(s) ds - \left(\frac{1}{4\pi^2 R} \int_0 f(s) ds \right) \cdot 2\pi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_C \left(\frac{\cos \varphi}{R_{MP}} - \frac{1}{2R} \right) f(s) ds. \end{aligned} \quad (59)$$

ومن المثلث $\triangle OPM$ (شكل ٦٥) يتضح أن

$$\begin{aligned} K &= \frac{\cos \varphi}{R_{MP}} - \frac{1}{2R} = \frac{2R \cos \varphi - R_{MP}}{2RR_{MP}} = \frac{2RR_{MP} \cos \varphi - R_{MP}^2}{2RR_{MP}^2} = \\ &= \frac{R^2 - \rho_0^2}{2R[R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)]}, \end{aligned} \quad (60)$$

وذلك لأن

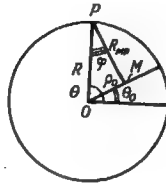
$$\rho_0^2 = R^2 + R_{MP}^2 - 2RR_{MP} \cos \varphi.$$

بالتعويض بالصيغة (60) الناتجة للنواة K في العلاقة (59) نحصل على تكامل بواسون

$$u = W(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2) f(\theta) d\theta}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (61)$$

الذى يعطى حل المسألة الحدية الأولى للدائرة .

والتحليلات الواردة في هذه الفقرة
توضح أنه بآية دالة متصلة f تعرف
العلاقة (61) دالة توافقية تؤول باتصال
إلى القيم الحدية لـ f .



شكل ٦٥

وإذا كانت الدالة f دالة متقطعة
الاتصال فإنه وفقاً لخاصية جهد الطبقة
الثنائية تكون الدالة W أيضاً متصلة في
جميع نقط اتصال f . ومن محدودية
الدالة f ،

$$|f| < C$$

نتج محدودية الدالة (61) :

$$|W(p_0, \theta_0)| < C \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2)}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)} d\theta = C,$$

وذلك لأن*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)} d\theta = 1. \quad (62)$$

٢- الدالة الحدية الأولى لنصف الفراغ . عين الدالة التوافقية المتصلة في كل
مكان في $z \geq 0$ والتي تأخذ على الحدود $z = 0$ القيمة المعطاة $f(x, y)$.

سنبحث عن حل هذه المسألة في صورة جهد الطبقة الثنائية

$$W(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \varphi}{R^2} v(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2.$$

وفي هذه الحالة يكون

$$\frac{\cos \varphi}{R^2} = \frac{z}{R^3} \frac{z}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}}$$

* نتج المساوية (62) من أن الطرف الأيسر هو عبارة عن حل المسألة الحدية الأولى عكسا $f = 1$

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\cos \varphi}{R^2} \right)_{z=0} = 0.$$

وبذلك فإن كثافة جهد الطبقة الثنائية هي

$$v(P) = \frac{1}{2\pi} f(P)$$

والدالة المطلوب تعيينها تساوى

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

ولا يصعب توضيح أن $u(x, y, z)$ تتحول بانتظام إلى الصفر عندما $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$ إذا كانت الدالة f تتمتع بهذه الخاصية.

فقرة ١١ : المعادلات التكاملية المناظرة للمسائل الحدية . عند حل المسائل الحدية لمعادلة لابلاس بواسطة جهدى الطبقتين البسيطة والثنائية توصلنا إلى معادلات فريد هولم التكاملية من النوع الثانى (50) .

وشروط قابلية حل معادلات فريد هولم التكاملية من النوع الثانى ذات النواة المتصلة والطرف الأيمن المحدود (القابل للتكامل) مشابهة لشروط قابلية حل مجموعات المعادلات الجبرية الخطية (التي تتحول إليها المعادلات التكاملية إذا ما استبدل التكامل بالمجموع التكاملى) . وتنحصر نظرية فريد هولم الأولى فيما يلى :

المعادلة التكاملية اللامتجانسة من النوع الثانى لها حل وحيد إذا كان للمعادلة المتجانسة المناظرة حل صفري فقط * .

* تكون نظرية فريد هولم للسحنات ذات الانحناء المحدود قابلة للتطبيق مباشرة لأن نواة المعادلة التكاملية (50) تكون متصلة .

ونظرة فريد هولم قابلة للتطبيق أيضا عندما تكون متصلة إحدى النوى المكررة (الثانية)

$$K^{(n+1)}(P_1, P_2) = \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} K^{(1)}(P_1, M) K^{(n)}(M, P_2) d\sigma_M, \quad K^{(1)}(P, M) = K(P, M).$$

ثبت أنه إذا كان Σ سطح لياپنوف فإن النوى للكررة لمعادلتنا تكون ابتداء من رقم معين

نثبت اعتماداً على النظرية للمصاغة أن المعادلة التكاملية (50) لها حل وحيد .
نكتفي بدراسة المنحنيات المحدبة التي لا تحتوى على أجزاء مستقيمة من الحدود .

مصلة . وكما رأينا تحقق اسطح ليايرونوف المتباينة

$$\left| \frac{\cos \theta}{r^2} \right| < \frac{C}{r^2 - a_1 - a_2}.$$

ويمكن التعبير عن النوى المتكررة في الصورة

$$K_{1,2}(P_1, P_2) = \iint_{\Sigma} K_1(P_1, M) K_2(M, P_2) d\sigma_M$$

نوضح أنه إذا كان $|K_i| < \frac{C_i}{r_i^2 - a_i}$ ($r_i = P_i M$; $a_i > 0$; $i = 1, 2$) فإن

$$|K_{1,2}| < \frac{C}{r^2 - a_1 - a_2} \quad r = P_1 P_2 \quad a_1 + a_2 < 2r$$

ومن الواضح أنه يكفى إثبات هذا التقدير تلك الحالة عندما تكون القطعة P_2 واقعة في جوار ليايرونوف Σ_0 للقطعة P_1 علماً بأنه بدلاً من التكامل على Σ_0 يمكن دراسة التكامل على السطح S_0 لهذا الجوار على المستوى المماس في القطعة P_1 وذلك وفقاً لأن

$$1 > \frac{\rho(P, M)}{r(P, M)} > B > 0$$

(حيث $\rho(P, M)$ البعد بين مسطقي النقطتين

P , M على المستوى المماس . B ثابت ما) .

وكذلك وفقاً للعلاقة بين عنصر السطح $d\sigma$ ومسقطه

dS : $d\sigma = dS / \cos \psi$. حيث ψ تبعاً للعلاقة

$$\cos \psi > 1/2 \quad (34)$$

للمنطقة المستوية تكون صحيحة للأخذة

التالية : إذا كان $|K_i| < \frac{C_i}{r_i^2 - a_i}$ فإن

$$|I| = \left| \iint_{S_0} K_1(P_1, M) K_2(M, P_2) dx dy \right| <$$

$$\frac{C}{r^2 - a_1 - a_2}.$$

شكل ٦٦

نرمز بالحرف R إلى قطر المنطقة S_0 . نقسم التكامل I إلى تكاملين : I_1 : المأخوذ على الدائرة G_1 التي نصف قطرها $2r$ ومركزها في القطعة P_1 و I_2 : المأخوذ على المنطقة الباقية G_2 (شكل ٦٦) . وحيث إنه للنقط

وفي هذه الحالة تكون نواة المعادلة (50) : $K(P_0, P)$ غير سالبة لأن

$$K(P_0, P) ds_P = d\omega,$$

حيث $d\omega$ هي زاوية مشاهدة القوس ds_P من النقطة P_0 .

ندرس قبل أى شىء المسألة الحدية الأولى للمنطقة الداخلية . المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (50) تكون على الصورة :

$$\pi v(s_0) + \int_0^L K(s_0, s) v(s) ds = 0. \quad (63)$$

M الواقعة في G_2 يكون

$$2 \geq \frac{r_1}{r_2} \geq \frac{2}{3} \quad \left(\begin{array}{l} r_1 < r_2 + r < 2r_2, \\ r_2 < r_1 + r < r_1 + \frac{r_1}{2} = \frac{3r_1}{2} \end{array} \right),$$

فإننا نحصل للتكامل I_2 على التقدير

$$|I_2| < 4C_1 C_2 \left| \int_0^{2\pi} \int_{\frac{R}{2}}^R \frac{1}{r_1^{2-a_1-a_2}} r_1 dr_1 d\varphi \right| < \begin{cases} \frac{C_2}{r^{2-a_1-a_2}}, & a_1 + a_2 < 2, \\ C_2 R^{a_1+a_2-1}, & a_1 + a_2 > 2. \end{cases}$$

وبإجراء التعويض بالتغيرات $x = rx'$, $y = ry'$ في التكامل للأعوذ على G_1 نحصل على :

$$|I_1| < \left| \frac{1}{r^{2-a_1-a_2}} \int_{G_1} \frac{C_1 C_2}{r_1^{2-a_1} r_2^{2-a_2}} dx' dy' \right|.$$

وفي التكامل الأخير للأعوذ على الدائرة G_1' التي نصف قطرها $2r$ يكون r_1' هو البعد عن المركز . r_2' هو البعد عن منتصف نصف القطر . ومن ثم فإن هذا التكامل يتقارب علما بأنه لا يعتمد على موضع النقطة P_3 أى على r . ومن هنا

$$|I_1| < \frac{C_4}{r^{2-a_1-a_2}}.$$

بوضع $C_3 + C_4 = C$ نحصل على للتباينة المطلوبة

$$|I| < \begin{cases} \frac{C}{r^{2-a_1-a_2}}, & a_1 + a_2 < 2, \\ CR^{a_1+a_2-2}, & a_1 + a_2 > 2. \end{cases}$$

ومن هنا يتبع أنه ابتداء من رقم معين تكون التكاملات المكونة للنوى المكررة محدودة وتتقارب بانتظام أى تعتبر دوال متصلة في متغيراتها .

وكما رأينا (انظر فقرة ٨) ، تتحقق المتساوية

$$\int_0^L K(s_0, s) ds = \pi,$$

التي يمكن بالاستعانة بها كتابة المعادلة المتجانسة (63) في الصورة :

$$\int_0^L [v(s_0) + v(s)] K(s_0, s) ds = 0. \quad (64)$$

نفرض أن $P_0^*(s_0^*)$ نقطة على المحيط C تصل عندها الدالة $|v(s)|$ إلى قيمتها العظمى . ومن هنا يتبع أن المجموع $v(s_0^*) + v(s)$ يحتفظ بإشارة ثابتة . وعندئذ بوضع $s_0 = s_0^*$ في (64) والاستعانة بأن $K(s_0, s) \geq 0$ نحصل على المتساوية

$$v(s_0^*) + v(s) = 0.$$

أو

$$v(s) = -v(s_0^*).$$

التي تتناقض مع الاتصال في النقطة s_0^* إذا كان فقط $v(s_0^*) \neq 0$.

وبالتالي فالمعادلة المتجانسة (63) يكون لها حل صفري فقط . وبذلك فالمعادلة اللامتجانسة يكون لها حل وحيد عند أية حالة f . *

والمسألة الحدية الثانية الخارجية كما رأينا (انظر فقرة ١٠) تؤول إلى المعادلة التكاملية

$$\pi\mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s)\mu(s) ds = f(s_0), \quad (54)$$

التي تكون نواتها $K_1(s_0, s)$ مترافقة مع النواة $K(s_0, s)$ أى أن $K_1(s_0, s) = K(s, s_0)$.

ونظرية فريدهولم الثانية تنحصر فيما يلي :

• عند وجود أجزاء مستقيمة في الحدود تصعب التحليلات بعض الشيء إلا أن توصيلها إلى النهاية لا يشكل أية صعوبة .

عدد الحلول المستقلة خطياً لمعادلة تكاملية متجانسة ما يساوى عدد الحلول المستقلة خطياً للمعادلة المترافقة معها .

ويتبع من هذه النظرية أن حل المعادلة (54) محدد تحديداً أحادى القيمة .
والمسألة الحدية الأولى الخارجية تناظرها المعادلة

$$- \pi v(s_0) + \int_0^L K(s_0, s) v(s) ds = f(s_0). \quad (52)$$

والمعادلة المتجانسة ($f=0$) وفقاً لما سبق يمكن أن تؤول إلى الصورة :

$$\int_0^L [v(s_0) - v(s)] K(s_0, s) ds = 0. \quad (65)$$

نرمز بالرمز s_0 إلى النقطة التي فيها $|v(s)|$ تصل إلى قيمتها العظمى فنحصل من (65) على :

$$v(s_0) = v(s).$$

ومن هنا ينتج أنه فقط يكون

$$v(s) = \text{const} = v_0$$

هو حل المعادلة المتجانسة . ووفقاً لنظرية فريدهولم الثانية يكون للمعادلة المتجانسة المترافقة حل وحيد .

وشرط قابلية حل المعادلة اللامتجانسة تعطيه نظرية فريدهولم الثالثة :

إذا كان لمعادلة تكاملية متجانسة ما

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$$

k من الحلول المستقلة خطياً $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) فإن المعادلة اللامتجانسة المترافقة معها

$$\psi(x) = \int_a^b K(s, x) \psi(s) ds + f(x)$$

يكون لها حل إذا كان $\int_0^h f(x) \phi_t(x) dx = 0$ $t = 1, 2, \dots, k$.

وبتطبيق نظرية فريدهولم الثالثة على المعادلة (53) المناظرة للمسألة الحدية الثانية الداخلية نحصل على شرط قابلية حل هذه المسألة :

$$\int_0^L f(s) ds = 0, \quad (66)$$

الذى سبق أن قابلناه فى بند ١ .

وشرط قابلية حل المسألة الحدية الأولى الخارجية يكون على الصورة :

$$\int_0^L f(s) h(s) ds = 0, \quad (67)$$

حيث $h(s)$ حل المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (53) . ولا يصعب توضيح المعنى الفيزيائى لهذه الدالة .

نفرض أن موصلًا أسطوانيًا مقطعه هو الشكل S . مشحون حتى جهد معين V_0 . وفى الموصل توجد كل الشحنة على السطح . نرمز بالرمز $\bar{h}(s)$ إلى كثافة الشحنات السطحية . والجهد المكون بهذه الشحنات السطحية يعتبر جهدًا للطبقة البسيطة ذات الكثافة $\bar{h}(s)$. ويعبر عنه بالعلاقة (29) . والمشتقات العمودية له من الداخل تساوى الصفر وذلك لأن داخل الموصل يكون $V = \text{const}$. ولذا فإن الدالة $\bar{h}(s)$ تحقق للمعادلة المتجانسة (53) وتتناسب مع الدالة $h(s)$ المعرفة فيما سبق . وهو ما يوضح للمعنى الفيزيائى لهذه الدالة .

وبذلك فإن المعادلات التكاملية التى تؤول إليها المسائل الحدية تكون دائماً قابلة للحل للمسألة الحدية الأولى الداخلية والمسألة الحدية الثانية الخارجية وقابلة للحل بالشرطين (67) . (66) للمسألة الحدية الثانية الداخلية والمسألة الحدية الأولى الخارجية .

مسائل على الباب الرابع

١ - عين الدالة u التوافقية داخل دائرة نصف قطرها a والتي تأخذ على محيطها C القيم :

$$(أ) . u|_C = A \cos \varphi \quad (ب) . u|_C = A + B \sin \varphi$$

٢ - حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ داخل المستطيل $0 \leq x \leq a$ ، $0 \leq y \leq b$ بالشروط الحدية

$$u|_{x=0} = f_1(y), \quad u|_{y=0} = f_2(x), \quad u|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=b} = 0.$$

أثبت أن العلاقة الناتجة عند ذلك تعطي حل المسألة لأية حالة متقطعة الاتصال مطاة على الحدود.

حل المسألة في الحالة الخاصة :

$$f_1(y) = Ay(b-y), \quad f_2(x) = B \cos \frac{\pi}{2a} x, \quad f_3 = f_4 = 0.$$

٣ - حل المعادلة $\Delta u = 1$ لدائرة نصف قطرها a بالشروط الحدى $u|_{r=a} = 0$.

٤ - حل المعادلة $\Delta u = Axy$ لدائرة نصف قطرها a ومركزها في النقطة $(0,0)$ بالشروط الحدى

$$u|_{r=a} = 0$$

٥ - حل المعادلة $\Delta u = A + B(x^2 - y^2)$ في الحلقة $a \leq \rho \leq b$. إذا كان

$$u|_{\rho=a} = A_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = 0.$$

نقطة الأصل توجد في مركز الحلقة .

٦ - كَوِّن حالة المصلح لمعادلة لابلاس (المسألة الحدية الأولى) :

(أ) لنصف دائرة - (ب) حلقة - (ج) للبطقة $(0 \leq x \leq l)$.

٧ - عين الدالة التوافقية داخل الحلقة $a \leq \rho \leq b$ والتي تحقق الشروط الحدية التالية :

$$u|_{\rho=a} = f_1(\varphi), \quad u|_{\rho=b} = f_2(\varphi).$$

٨ - عين حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ في نصف المستوى $y \geq 0$ بالشروط الحدية

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0, \\ u_0 & , \quad x > 0. \end{cases}$$

٩ - عين الدالة $u(p, \varphi)$ التوافقية داخل القطاع الدائري $\rho \leq a$ - $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ بالشروط

الحدية :

$$u|_{y=0} = q_1, \quad u|_{y=a} = q_1, \quad u|_{x=a} = q_2, \quad (أ)$$

حيث q_1, q_2 ثابتان ،

$$u|_{y=0} = u|_{y=a} = 0, \quad u|_{x=a} = f(y), \quad (ب)$$

١٠ - بطريقة الفروق المحدودة حل المسألة الحدية الأولى للمعادلة $\Delta u = 0$ داخل المستطيل $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ بتقسيم كل ضلع من أضلاعه إلى ثمانية أجزاء متساوية إذا كانت الشروط الحدية على الصورة :

$$u|_{x=0} = \frac{y}{b} \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad u|_{y=0} = \frac{x}{a} \sin \frac{\pi}{a} x, \quad u|_{x=a} = u|_{y=b} = 0.$$

قارن مع الحل التحليلي (انظر الكتاب الثاني ، الباب الرابع ، بند ٣) .

١١ - عين الجهد الحجمي للكرة عند ثبات الكثافة $\rho = \rho_0$.

إرشاد : حل المعادلة $\Delta u = 0$ خارج الكرة والمعادلة $\Delta u = 4\pi\rho_0$ داخل الكرة وحقق شروط التوافق للحل على سطح الكرة .

١٢ - عين جهد الطبقة البسيطة الموزعة بكثافة ثابتة $v = v_0$ على سطح كرة .

إرشاد : ابحث عن حل المعادلة $\Delta u = 0$ خارج وداخل الكرة واستعن لتوافق الحل بشروط انفصال مشتقة جهد الطبقة البسيطة .

١٣ - حل المسألة الحدية الأولى للأسطوانة الدائرية المحدودة ($0 \leq z \leq a, 0 \leq \rho \leq 1$) :

(أ) على قاعدة الأسطوانة مطعاة شروط حدية صفرية (من النوع الأول أو الثاني) . وعلى السطح الجانبي $u|_{z=a} = f(\rho)$.

(ب) على السطح الجانبي وعلى إحدى قاعدتي الأسطوانة مطعاة شروط حدية صفرية (من النوع الأول والثاني) وعلى القاعدة الأخرى للأسطوانة $u = f(\rho)$ ، على سبيل المثال $f(\rho) = A\rho \left(1 - \frac{\rho}{a}\right)$.

١٤ - حل المعادلة اللامتجانسة

$$\Delta u = -f$$

في المنطقة الأسطوانية اللامحدودة بالشروط الحدية الصفرية (من النوع الأول أو الثاني) وتكون دالة المصدر .

١٥ - عين الدالة التوافقية داخل الكرة - المساوية u_1 على إحدى نصفي السطح الكروي و u_2 على النصف الثاني .

١٦ - اكتب المضكوك بالدوال الكروية لكثافة الشحنات السطحية المستحقة على كرة موصلة بشحنة نقطية .

١٧ - حل مسألة استقطاب كرة عازلة كهربائياً في مجال الشحنة النقطية .

١٨ - احسب جهد الجاذبية لقرص مستو. قارن مع التمثيل التقاربي للجهد الجاذبية على مسافات كبيرة

١٩ - احسب الجهد المغناطيسي لتيار دائري .

٢٠ - حل مسألة اضطراب مجال كهربائي مستو مواز بكرة موصلة توصيلاً مثاليًا . حل المسألة لكرة غير موصلة مطلقًا .

ملاحق الباب الرابع

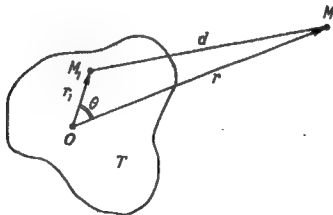
ملحق ١ - الصيغة التقاربية للجهد الحجمي

عند دراسة الجهد الحجمي

$$V(M) = \iiint_T \frac{\rho(P) d\tau_P}{d}, \quad d = R_{MP} \quad (1)$$

على مسافات بعيدة عن الجسم عادة تؤخذ قيم الجهد المساوية m/R ، حيث m كتلة الجسم T . R بعد مركز ثقله عن نقطة الملاحظة . لتبنت صيغة تقاربية أكثر دقة للجهد V .

نفرض أن Σ سطح كروي مركزه في نقطة الأصل ، يحتوي كلية الجسم T . وخارج هذا السطح الكروي يكون الجهد دالة توافقية .



شكل ٦٧

وبعد نقطة الملاحظة $M(x, y, z)$ عن النقطة المتغيرة داخل الجسم $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (شكل ٦٧) التي يتم بالنسبة إليها التكامل يساوي

$$d = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta} \quad (r = OM, r_1 = OM_1), \quad (2)$$

ومن هنا

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\mu}}; \quad \alpha = r_1/r; \quad \mu = \cos \theta. \quad (3)$$

وحيث إن $r_1 < r$ فإن $\alpha < 1$ ولذا يكون صحيحًا للمفكوك (انظر الكتاب الثاني ، الباب الخامس ، قسم ٢ ، بند ١)

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\mu), \quad (4)$$

حيث $P_n(\mu)$ كثيرة حدود ليجاندر من الرتبة n (التونية) . بالتعويض بهذه الصيغة في العلاقة (١) والأخذ في الاعتبار أن $1/r$ لا تعتمد على متغيرات التكامل نحصل على :

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{1}{r} \iiint_V \rho \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\mu) d\tau = V_1 + V_2 + V_3 + \dots = \\ &= \frac{1}{r} \iiint_V \rho d\tau + \frac{1}{r^2} \iiint_V \rho r_1 P_1(\mu) d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{r^3} \iiint_V \rho r_1^2 P_2(\mu) d\tau + \dots \quad (5) \end{aligned}$$

والحد الأول يساوى m/r حيث m كتلة كل الجسم . ويعطينا التقريب الأول لحساب الجهد لقيم r الكبيرة .

ننتقل إلى حساب الحدود الأخرى للمفكوك (5) . الدالة المكاملة في الحد الثاني تساوى

$$\rho P_1(\mu) r_1 = \rho \mu r_1 = \rho r_1 \cos \theta = \frac{\rho x x_1 + \rho y y_1 + \rho z z_1}{r}.$$

والمقادير x, y, z, r لا تعتمد على متغيرات التكامل ويمكن إخراجها خارج علامة التكامل . وبعد ذلك يأخذ الحد الثاني للمفكوك الجهد الصورة التالية :

$$\frac{1}{r^2} \iiint_V \rho r_1 P_1(\mu) d\tau = \frac{1}{r^2} (M_1 x + M_2 y + M_3 z) = \frac{M}{r^2} (x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}),$$

حيث

$$M_1 = \int \int \int_T \rho x_1 d\tau = M\bar{x}, \quad M_2 = \int \int \int_T \rho y_1 d\tau = M\bar{y};$$

$$M_3 = \int \int \int_T \rho z_1 d\tau = M\bar{z}$$

هي العزوم الأولى \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} إحداثيات مركز الثقل. وبذلك يتناقص الحد الثاني مثل $1/r^3$. وإذا أخذنا نقطة الأصل في مركز الثقل ($\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$) فإن $V_2 = 0$.

ندرس الحد الثالث للمفكوك. نحول الصيغة المكاملة

$$\begin{aligned} \rho r_1^2 P_2(\mu) &= \rho r_1^2 \frac{3\mu^2 - 1}{2} = \rho r_1^2 \frac{3(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2 - r_1^2}{2r_1^3} = \\ &= \frac{\rho}{2r_1^3} [3(x_1x + y_1y + z_1z)^2 - r_1^2]. \end{aligned}$$

وبالاصطلاح على الرمز التالي :

$$M_{1k} = \int \int \int_T \rho x_1 x_k d\tau \quad (x = x_1; y = x_2; z = x_3).$$

نصل إلى الصيغة التالية للحد الثالث V_3 :

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{r^3} \int \int \int_T \rho r_1^2 P_2(\mu) d\tau = \\ &= \frac{1}{2r^3} \{x^2 [3M_{11} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] + \\ &+ y^2 [3M_{22} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] + z^2 [3M_{33} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] + \\ &+ 2 \cdot 3xyM_{12} + 2 \cdot 3xzM_{13} + 2 \cdot 3yzM_{23}\}. \end{aligned}$$

وكثيرة الحدود بين القوسين الخارجيين تعتبر كثيرة حدود توافقية وذلك لأنه يمكن كتابتها في الصورة :

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{2r^3} \{ (x^2 - y^2) [M_{11} - M_{22}] - (z^2 - x^2) [M_{11} - M_{33}] + \\ &+ (y^2 - z^2) [M_{22} - M_{33}] + 6[xyM_{12} + xzM_{13} + yzM_{23}] \}. \end{aligned}$$

حيث يحقق كل حد معادلة لابلاس . والمعاملات داخل الأقواس المربعة تصاغ بدلالة عزوم القصور الذاتي . إن عزم القصور الذاتي للجسم T بالنسبة إلى المحور x يساوى كما نعلم :

$$A = \int \int \int_T \rho (y_1^2 + z_1^2) d\tau = M_{22} + M_{33}.$$

وبالمثل عزم القصور الذاتي بالنسبة إلى المحورين y . z يساويان :

$$B = M_{33} + M_{11}; \quad C = M_{11} + M_{22}.$$

ومن هنا ينتج أن

$$M_{11} - M_{22} = B - A; \quad M_{11} - M_{33} = C - A; \quad M_{22} - M_{33} = C - B.$$

ونتيجة لذلك نصل إلى الصيغة التقاربية للجهد

$$V \cong \frac{m}{r} + \frac{m}{r^3} (x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}) + \frac{1}{2r^5} \{ (x^2 - y^2)(B - A) + (y^2 - z^2)(C - B) + (z^2 - x^2)(A - C) + 6(xyM_{12} + yzM_{23} + zxM_{31}) \}, \quad (6)$$

الصحيحة بدقة حتى الحدود من الرتبة $1/r^5$.

وتبسط الصيغة (6) إذا اخترنا نقطة الأصل في مركز الثقل ومددنا محاور الإحداثيات في اتجاه محاور القصور الرئيسية :

$$V \cong \frac{m}{r} + \frac{1}{2r^5} \{ (x^2 - y^2)(B - A) + (y^2 - z^2)(C - B) + (z^2 - x^2)(A - C) \}. \quad (7)$$

والتمثيل التقاربي للجهد الذى حصلنا عليه يكفل الإجابة على عديد من الأسئلة المتعلقة بالسألة العكسية لنظرية الجهد والمنحصرة في تعيين مميزات الجسم وفقاً لجهده (أو بأية مشتقة من مشتقاته) .

بالفعل فتعيين معاملات المفكوك (6) يمكن تعيين الكتلة وإحداثيات مركز الثقل وعزوم القصور للجسم .

ملحق ٢ - مسائل الكهروستاتيكا

في مسائل الكهروستاتيكا يؤول حل معادلات ماكسويل إلى البحث عن دالة مقياسية (scalar) - ألا وهى الجهد φ - ترتبط بشدة المجال بالعلاقة

$$E = -\text{grad } \varphi.$$

بالاستعانة بمعادلة ماكسويل

$$\text{div } E = -4\pi\rho,$$

نحصل على

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

وبذلك يتحقق الجهد معادلة بواسون في نقاط الفراغ حيث توجد الشحنات الكهروستاتيكية ويتحقق معادلة لابلاس في النقاط حيث لا توجد شحنات .

١ - المسألة الأساسية في الكهروستاتيكا هى مسألة البحث عن المجال الناشئ بمجموعة شحنات على الموصلات المعطاة . وعند ذلك هناك صياغتان محتملتان لهذه المسألة :

(أ) تعطى جهود الموصلات ويطلب تعيين المجال خارج الموصلات وكثافة الشحنات على الموصلات . وتنحصر الصياغة الرياضية للمسألة فيما يلى :

المطلوب تعيين الدالة φ التى تحقق معادلة لابلاس $\Delta\varphi = 0$ فى كل مكان خارج مجموعة الموصلات المعطاة وتؤول إلى الصفر فى المالا نهاية وتأخذ القيم المعطاة φ_i على سطوح الموصلات S_i :

$$\varphi|_{S_i} = \varphi_i, \quad \varphi_i = \text{const.}$$

وبذلك نصل فى هذه الحالة إلى المسألة الحدية الأولى لمعادلة لابلاس . وتنتج وحدانية حلها من النظرية العامة .

(ب) الصياغة العكسية للمسألة محتملة أيضاً . على الموصلات تعطى شحنات كاملة . والمطلوب تعيين جهود الموصلات وتوزيع الشحنات على سطوح الموصلات والمجال خارجها . وحل هذه المسألة يؤول إلى البحث عن الدالة φ التى تحقق معادلة لابلاس

$$\Delta\varphi=0$$

خارج مجموعة الموصلات المعطاة وتؤول إلى الصفر في المالا نهاية وتأخذ على سطوح الموصلات قيمة ثابتة ما معطاة :

$$\varphi|_{S_i} = \text{const}$$

ونحقق العلاقة التكاملية على سطوح الموصلات

$$\oint_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -4\pi e_i$$

حيث e_i الشحنة الكاملة للموصل رقم i .

٢- وحلانية حل المسألة الحدية الثانية لا تتج من النظرية العامة . ولكن يمكن إثباتها بسهولة .

نفرض أنه يوجد حلان φ_1 . φ_2 للمسألة (ب) . عندئذ يحقق الفرق بينهما

$$\varphi' = \varphi_1 - \varphi_2$$

المعادلة

$$\Delta\varphi' = 0$$

والشروط

$$\varphi'|_{S_i} = \text{const}, \quad \oint_{S_i} \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma = 0, \quad \varphi'|_{\infty} = 0.$$

نحصر كل الموصلات المعطاة داخل السطح الكروي Σ_R ذي نصف القطر الكبير بدرجة كافية R ونطبق على الدالة φ' علاقة جرين الأولى في المنطقة T_R . والمحدودة بالسطح الكروي Σ_R وسطوح الموصلات S_i :

$$\int_{T_R} (\nabla \varphi')^2 d\tau = \int_{\Sigma_R} \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma + \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma.$$

وتبعاً للشروط في المالا نهاية* وعلى السطوح نحصل على :

* من الشرط $\varphi'|_{\infty} = 0$ ينتج انتظام (regularity) لدالة φ' في المالا نهاية (انظر صفحة ٣٥٥) .
وفقاً لذلك يكون

$$R \rightarrow \infty \text{ عندما } \int_{\Sigma_R} \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma \rightarrow 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{T_R} (\nabla \varphi')^2 d\tau = 0,$$

ومن هنا ونظرًا لأن الصيغة الكاملة غير سالبة ينتج أن

$$\varphi' = \text{const} \quad \text{أو} \quad \nabla \varphi' = 0$$

في كل مكان في المنطقة محل الدراسة . وبأخذ الشرط في المالا نهاية $\varphi'|_{\infty} = 0$ في الاعتبار نحصل على :

$$\varphi' = 0,$$

مما يثبت وحدانية المسألة المصاغة .

٣- من وحدانية حل المسألة الحدية لمعادلة لابلاس ينتج أن جهد الموصل الواحد على أنفراد يتناسب طرديًا مع الشحنة للكسبة :

$$\frac{e}{\varphi} = C.$$

بالفعل ، إذا وضعنا على موصل واحد الشحنتين e ، $e' = me$ فإن الجهدين المناظرين φ ، φ' يجب أن يحققا المعادلتين

$$\Delta \varphi = 0; \quad \Delta \varphi' = 0$$

والشروط الحدية

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = e; \quad -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma = me,$$

ومن هنا ينتج أن $\varphi' - m\varphi = 0$ أى أن $\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{e'}{e}$ وعلى سطح الموصل الواحد المنفرد نحصل على :

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{e'}{e} = C = \text{const.}$$

وهذا الثابت C يسمى بسعة الموصل المنفرد ، وهي لا تعتمد على شحنة الموصل . وإنما تتحدد بشكل ومقاييس هذا الموصل . وبذلك فالموصل المنفرد تتحقق العلاقة

$$e = C\varphi, \quad C = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma.$$

وسعة الموصل المنفرد تساوى عددية الشحنة التي عند إكسابها للموصل يكتب الموصل بهذا يساوى الواحد الصحيح . وإذا لم يكن الموصل منفرداً فإن جهده يعتمد اعتماداً جوهرياً على أشكال ومواقع الموصلات الأخرى . وللمجموعة الموصلات تتحقق العلاقات :

$$\begin{aligned} e_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + \dots + C_{1n}(\varphi_n - \varphi_1), \\ e_2 &= C_{21}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{22}\varphi_2 + \dots + C_{2n}(\varphi_n - \varphi_2), \\ &\vdots \\ e_n &= C_{n1}(\varphi_1 - \varphi_n) + C_{n2}(\varphi_2 - \varphi_n) + \dots + C_{nn}\varphi_n, \end{aligned}$$

حيث ϕ_i , e_i شحنة. وجهد الموصل رقم i . والمقدار C_{ik} له معنى الشحنة المتبادلة للموصل رقم i بالنسبة إلى الموصل رقم k . وهي يمكن تعريفها بوصفها تلك الشحنة التي يجب إكسابها للموصل رقم i لكي يكون لكل الموصلات فيما عدا الموصل رقم i جهد صفري ، أما الموصل رقم k فيكون له جهد يساوى الواحد الصحيح .

٤ - من السهل أن نبين أن مصفوفة المعادلات C_n تكون مصفوفة متماثلة أى تتحقق العلاقة

$$C_{A_1} = C_{A_2}$$

وللتحديد ندرس حالة الموصلين رغم أنه في حالة الموصلات التي عددها n يقلل الإثبات كما هو.

نفرض أنه معطى موصلان a , b . عندئذ نقول تحديد المعاملين C_{aa} , C_{bb} إلى تعيين الدالتين $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ اللتين تحققان المعادلتين $\Delta u^{(1)} = 0$, $\Delta u^{(2)} = 0$ والشروط الحدية :

$$u^{(1)}|_{S_a} = 0; \quad u^{(1)}|_{S_b} = 1; \quad u^{(1)}|_{\infty} = 0,$$

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_{S_a} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} d\sigma = e_a^{(1)} = C_{ab};$$

$$u^{(2)}|_{S_a} = 1; \quad u^{(2)}|_{S_b} = 0; \quad u^{(2)}|_{\infty} = 0,$$

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_{S_b} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n} d\sigma = e_b^{(2)} = C_{ba}.$$

نرسم سطحاً كروياً نصف قطره R كبير بدرجة كافية ويحتوى هنا السطح الكروى الموصلين a, b ، ونطبق علاقة جرين على الدالتين $u^{(1)}, u^{(2)}$ فى المنطقة بين السطح Σ_R وسطحي الوصلين S_a, S_b :

$$\int_{\Sigma_R} (u^{(1)} \Delta u^{(2)} - u^{(2)} \Delta u^{(1)}) d\tau = \int_{S_a + S_b + S_R} \left(u^{(1)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n} - u^{(2)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} \right) d\sigma.$$

والتكامل فى الطرف الأيسر لهذه المتساوية يساوى الصفر. بالاستعانة بالشروط الحدية والشروط على المالا نهاية نحصل على:

$$\int_{S_b} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n} d\sigma - \int_{S_a} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} d\sigma = 0$$

أو

$$C_{ab} = C_{ba},$$

وهو المطلوب إثباته.

• - ننتقل إلى أمثلة محددة.

ندرس مسألة مجال الكرة المشحونة. نفرض أنه أعطى على سطح كرة موصلة نصف قطرها a الجهد φ_0 . وبحل للمسألة (أ) يسهل توضيح أن مجال وكثافة الشحنات على سطح الكرة فى هذه الحالة سيتحددان بالصيغتين

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{r} a, \quad \sigma = \frac{\varphi_0}{4\pi a^2}.$$

وإذا كانت الشحنة الكاملة q_0 التى تكتسبها الكرة هى المعطاة على سطح الكرة بدلاً من الجهد φ_0 فإن

$$\varphi_0 = \frac{q_0}{a}, \quad \sigma = \frac{q_0}{4\pi a^2}, \quad \varphi = \frac{q_0}{r} \quad (r > a).$$

وعند ذلك تكون سعة الكرة هي

$$C = a,$$

أى فى وحدات القياس المطلقة تكون سعة الكرة المفردة مساوية عددياً لنصف قطرها .

وبمقابلة المثال التالى ندرس مسألة المكثف الكروى (مجموعة من سطحين كرويين موصلين متحدى المركز) .

نفرض أن الكرة الداخلية ونصف قطرها r_1 على جهد معطى V_0 . والكرة الخارجية ونصف قطرها r_2 موصلة بالأرض . عندئذ يؤول تحديد المجال داخل المكثف إلى البحث عن الدالة φ التى تحقق المعادلة

$$\Delta\varphi = 0$$

والشرطين

$$\varphi|_{r_1} = V_0, \quad \varphi|_{r_2} = 0.$$

ومن السهل أن نوضح أنه فى هذه الحالة يكون

$$\varphi = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} V_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right),$$

وسعة المكثف الكروى تكون مساوية

$$C = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

وتعتبر مسألة تعيين جهد السطح الكروى عند وجود سطح كروى آخر غير متحد المركز مع الأول مسألة أعقد . وهذه المسألة تحل بطريقة الانعكاسات . والحل التحليلى لها طويل ومعقد ولن نورده هنا .

٦ - ننتقل إلى المسائل فى بعدين (ثنائية الأبعاد) .

بمقابلة مثال ندرس المكثف الأسطوانى المتكون بأسطوانتين لانهائيتين الطول متحدتي المحور ، على إحداها توزعت بانتظام الشحنة الكهربائية . ومن الواضح أن حل المسألة واحد فى كل المستويات الموازية لمستوى المقطع العمودى

للأسطوانة . ولذا يمكن اعتبار المسألة مستوية وبدلاً من الشحنة الكاملة إعطاء الشحنة على وحدة الطول λ .

وإذا كانت الأسطوانة الخارجية ونصف قطرها r_2 موصلة بالأرض وعلى الأسطوانة الداخلية ونصف قطرها r_1 معطاة الشحنة λ فإن جهد المجال في المكثف يتحدد بالصيغة

$$\varphi = 2\lambda \ln \frac{r_2}{r_1} ,$$

وسعة وحدة طول المكثف الأسطوانى تساوى

$$C = \frac{1}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} .$$

والمثال المدروس هنا يكفل حل المسألة الأعقد لتعيين سعة سلك موصل يقع فوق مستوى موصل . نفرض أنه يوجد سلك موصل لانتهائى الطول نصف قطره ρ فوق مستوى لانتهائى وعلى بعد l منه . وعلى السلك موزعة شحنة كثافتها λ (شحنة وحدة الطول) . من الواضح أن هذه المسألة يمكن حلها كمسألة مستوية (فى بعدين) .

ملحق ٣ - المسألة الأساسية للاستكشاف الكهربائى

لدراسة لاتجانس القشرة الأرضية بهدف اكتشاف الخامات تطبق على نطاق واسع الطرق الكهربائية . وينحصر الشكل الأساسى فى طريقة الاستكشاف الكهربائى بتيار مستمر فيما يلى : يمر التيار من بطارية إلى الأرض بواسطة أقطاب كهربائية (الكثودات) موصلة بالأرض ، ويقاس على سطح الأرض جهد مجال التيار المستمر للتكون بهذه الطريقة . وبواسطة الملاحظات على السطح يتم تحديد تركيب ما تحت الأرض . وتؤسس طرق تحديد التركيب تحت الأرضى (تفسير الملاحظات) على الحل الرياضى لمسائل مناظرة .

إن جهد مجال التيار المستمر فى الوسط المتجانس يحقق معادلة لابلاس

$$\Delta V = 0 \quad (z > 0) \quad (1)$$

بالشرط الإضافي

$$\left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (2)$$

الذى يعنى أن المركبة الرأسية لكثافة التيار على السطح (الظاهر) $z = 0$ تساوى الصفر لأن نصف الفراغ $z < 0$ (الهواء) غير موصل .

ندرس ألكترودا نقطياً على حدود نصف الفراغ عند النقطة A . ومن الواضح أن جهد المجال سيكون مساوياً .

$$V = \frac{I\rho}{2\pi R}, \quad (3)$$

حيث R البعد عن المصدر A ، ρ المقاومة النوعية للوسط ، I شدة التيار . وهذه الدالة تختلف عن دالة المصدر في الفراغ اللانهائى بالمعامل 2 وذلك وفقاً بالشرط (2) .

وبقياس فرق الجهد في كل من النقطتين N ، M الواقعتين على مستقيم واحد مع A بواسطة دائرة قياس نحصل على

$$V(M) - V(N) = \frac{\partial V}{\partial r} \Delta r,$$

حيث Δr البعد بين النقطتين N ، M .

وبفرض أن النقطتين N ، M قريبتان كل من الأخرى بدرجة كافية نحصل على :

$$\frac{V(M) - V(N)}{\Delta r} \cong \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right| \cong \frac{I\rho}{2\pi r^2},$$

حيث r بعد النقطة O (مركز الدائرة MN) عن الألكترود المغذى . وشدة التيار I في الدائرة المغذية معلومة لأنها تسجل أثناء سير العمل . ومن هنا نحصل لمقاومة نصف الفراغ المتجانس على :

$$\rho = \frac{2\pi r^2}{I} \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right|. \quad (4)$$

وإذا كان الوسط غير متجانس فإن المقطار ρ المعروف بالعلاقة (4) يسمى بالمقاومة الظاهرية (apparent resistance) ويرمز لها بالرمز ρ_a . و ρ_a لن تكون كمية ثابتة .

ندرس مسألة الاستكشاف الكهربائي الرأسى عندما تقع طبقات القشرة الأرضية أفقيًا وتكون مقاومتها معتمدة فقط على العمق :

$$\rho = \rho(z).$$

وفي هذه الحالة تكون المقاومة الظاهرية دالة فى المسافة $r = AO$. وتنحصر مسألة تفسير نتائج الاستكشافات الكهربائية الرأسية فى تعيين الدالة $\rho(z)$ التى تعطى المقطع الكهربائى للوسط وفقاً لقيم $\rho_0(r)$ المعروفة .

لندرس بالتفصيل مسألة الوسط الثنائى الطبقة عندما تقع طبقة متجانسة سمكها l ومقاومتها ρ_0 على وسط متجانس ذى مقاومة ρ_1 .

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 & 0 \leq z < l, \\ \rho_1 & l < z. \end{cases}$$

ومن الواضح أن المقاومة الظاهرية ρ_0 على الأبعاد غير الكبيرة $l \ll r$ تكون مساوية ρ_0 لأن الوسط التحتى سيكون تأثيره طفيفاً.. وللمسافات البعيدة ($r \gg l$) تكون ρ_0 مساوية ρ_1 .

وبذلك تتحول المسألة إلى تعيين حل معادلة لابلاس V_0 فى الطبقة $0 < z < l$ و V_1 فى نصف الفراغ $z > l$. وعندما $z = l$ يجب أن تتحقق شروط اتصال الجهد

$$V_0|_{z=l} = V_1|_{z=l} \quad (5)$$

واتصال المركبات العمودية لكثافة التيار

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial V_0}{\partial z} \Big|_{z=l} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial z} \Big|_{z=l}. \quad (6)$$

وعندما $z = 0$ فإن الجهد V_0 يجب أن يحقق الشرط (2) . وفى النقطة A التى سنختارها نقطة أصل لمجموعة الإحداثيات الأسطوانية (r, φ, z) يجب أن يكون للجهد V_0 انفراد على الصورة (3)

$$V_0 = \frac{\rho_0 l}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} + v_0. \quad (7)$$

حيث v_0 حالة محدودة .

والدالة V_1 يجب أن تكون محدودة في المالا نهاية . وتحقق الدالتان V_1 , v_0 المعادلة (1) التي تأخذ نظراً لتماثل المسألة الأسطوانى الصورة

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

وتعطى طريقة فصل للتغيرات نوعين من الحلول المحدودة عند $r=0$ للدالة V :

$$e^{\pm \lambda z} J_0(\lambda r),$$

حيث J_0 دالة بيسل من الرتبة الصفرية (انظر الكتاب الثانى ، الباب الخامس ، قسم ١ ، بند ١) ، λ بارامتر الفصل بين التغيرات . نبحث عن الحل فى الصورة :

$$V_0(r, z) = \frac{\rho_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \int_0^\infty (A_0 e^{-\lambda z} + B_0 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

$$V_1(r, z) = \int_0^\infty (A_1 e^{-\lambda z} + B_1 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

حيث A_0, B_0, A_1, B_1 ثوابت ما . والشرط (2) يعطى العلاقة بين A_0, B_0 . نحسب

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = -\frac{\rho_0 I}{2\pi} \cdot \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \int_0^\infty (-\lambda A_0 e^{-\lambda z} + \lambda B_0 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r) d\lambda.$$

والشرط (2) يأخذ الصورة

$$\int_0^\infty (B_0 - A_0) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = 0$$

لأى r . ومن هنا يكون

$$B_0 = A_0.$$

ومن شرط محدودية V_1 عندما $z \rightarrow \infty$ يتبع أن

$$B_1 = 0.$$

وبذلك فإن

$$V_1(r, z) = \int_0^\infty A_1 e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$V_0(r, z) = \int_0^{\infty} [q e^{-\lambda z} + A_0 (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z})] J_0(\lambda r) d\lambda;$$

وعندئذ استخدمنا العلاقة

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \quad (8)$$

(انظر الكتاب الثانى ، الباب الخامس ، قسم ١ ، بند ٥) ورمزنا بالرمز $q = \frac{\rho_0 I}{2\pi}$.

والثابتان الباقيان A_0 ، A_1 يعرفان من الشرطين (6) ، (5) فى حالة $z = l$ اللذين يؤولان إلى مجموعة من المعادلات الجبرية :

$$A_0 (e^{-2\lambda l} + 1) - A_1 e^{-2\lambda l} = -q e^{-2\lambda l},$$

$$\frac{1}{\rho_0} A_0 (e^{-2\lambda l} - 1) - \frac{1}{\rho_1} A_1 e^{-2\lambda l} = -\frac{q}{\rho_0} e^{-2\lambda l},$$

ومن هنا نعين المعامل

$$A_0 = q \frac{(\rho_1 - \rho_0) e^{-2\lambda l}}{(\rho_1 + \rho_0) - (\rho_1 - \rho_0) e^{-2\lambda l}},$$

والحل V_0 للطبقة العليا يعطى بالعلاقة

$$V_0(r, z) = \frac{I \rho_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda z} + \frac{k e^{-2\lambda l}}{1 - k e^{-2\lambda l}} (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}) \right] J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (9)$$

حيث وضعنا

$$\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0} = k.$$

نجرى بعض التحويلات للصيغة الناتجة . حيث إن $|k| < 1$ فإننا يمكن أن نكتب :

$$\frac{k e^{-2\lambda l}}{1 - k e^{-2\lambda l}} = \sum_{n=1}^{\infty} k^n \cdot e^{-2\lambda l n}$$

$$V_0(r, z) =$$

$$= \frac{I \rho_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k^n e^{-\lambda (2nl + z)} J_0(\lambda r) d\lambda + \frac{I \rho_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} k^n e^{-\lambda (2nl - z)} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (9')$$

ومن هنا نحصل بالاستعانة بالعلاقة (8) على :

$$V_0(r, z) = \frac{I\rho_0}{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - 2nd)^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2nd)^2}} \right). \quad (10)$$

ويمكن الحصول مباشرة على هذه الصيغة للحل (9) إذا حلت المسألة بطريقة الانعكاسات . بوضع $z=0$ نحصل على توزيع الجهد على سطح الأرض :

$$V_0(r, 0) = \frac{I\rho_0}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{r^2 + (2nd)^2}} \right], \quad (11)$$

ومن هنا

$$\frac{\partial V_0}{\partial r} = -\frac{I\rho_0}{2\pi} \left[\frac{1}{r^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n r}{[r^2 + (2nd)^2]^{3/2}} \right],$$

ونحصل لـ ρ_k وفقًا للعلاقة (4) على :

$$\begin{aligned} \rho_k &= \rho_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n r^2}{[r^2 + (2nd)^2]^{3/2}} \right] = \\ &= \rho_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n \left(\frac{\xi}{2}\right)^2}{\left[\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 + n^2\right]^{3/2}} \right] = \rho_0 f(\xi), \end{aligned} \quad (12)$$

حيث $\xi = r/l$. ورمز $f(\xi)$ إلى الصيغة بين القوسين المربعين . وعندما $l \ll r$ نحصل على

$$\rho_k \cong \rho_0.$$

ولتقدير سلوك ρ_k عند قيم r الكبيرة نجعل $r \rightarrow \infty$ (عندما $\xi \rightarrow \infty$) في العلاقة (12). ونهاية الحد التوافي للجموع ستكون مساوية k^n . ومن هنا ينتج أن

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \rho_k &= \rho_0 \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} k^n \right) = \rho_0 \left(1 + \frac{2k}{1-k} \right) = \\ &= \rho_0 \frac{1+k}{1-k} = \rho_0 \frac{\rho_1 + \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0)}{\rho_1 + \rho_0 - (\rho_1 - \rho_0)} = \rho_1. \end{aligned}$$

وبمقارنة المنحنى التجريبي (الناتج بالتجربة العملية) مع المنحنى المحدد بالعلاقة (12) يمكننا تعيين ρ_0 بقيم ρ_k عند قيم r الصغيرة وتعيين ρ_1 بقيم ρ_k لقيم r

الكبيرة . وسلك الطبقة العليا الموصلة 1 يحدد بالتجربة فهو يساوى قيمة 1 التي عندها يكون المنحنى التجريبي بوصفه الدالة $\rho(r/l) = \rho(r/l)$ أقرب ما يمكن للمنحنى المحسوب بالعلاقة (12) . ولن نتوقف هنا عند العملية التكنيكية لتحديد 1 بالتجربة بواسطة مقياس الرسم اللوغاريتمية المزدوجة .

وفي حالة المقاطع المتعددة الطبقات بحسب منحنيات ρ_n بنفس الطريقة السابقة . وتحدد طبيعة المقطع الكهربائي للوسط بواسطة اختيار المنحنى النظرى الأقرب انطباقاً على المنحنى التجريبي . وعند ازدياد عدد الطبقات تتعقد عملية التفسير لأن عدد المنحنيات النظرية المساعدة يزداد كثيراً .

ونشير إلى أنه عند المقاطع الكهربائية المختلفة $\rho_1(z) \neq \rho_2(z)$ تكون المقاومات الظاهرية المناظرة مختلفة أيضاً :

$$\rho_1^{(0)}(r) \neq \rho_2^{(0)}(r);$$

وبالتالى فمسألة تعيين المقطع الكهربائي بقيم المقاومة الظاهرية يكون لها من وجهة النظر الرياضية حل وحيد .

وتقابلنا في مختلف مجالات الفيزياء والعلوم التكنيكية مسائل مماثلة لمسألة الاستكشاف الكهربائي .

فنتقابل المسائل الكهروستاتيكية عند تصميم مختلف الأجهزة الألكترونية ونقابل المسائل الحرارية والهيدروديناميكية في عديد من مجالات التكنيك (الانتقال الحرارى للمباني ، ترشيح المياه وراء السدود .. الخ) .

ومسائل تعيين المجال المغناطيسى في وسط لا متجانس تقابلنا على سبيل المثال في عملية الاكتشاف المغناطيسى للعيوب والنواقص في الصناعة . فلتعيين العيب في قطعة مصنعة ، على سبيل المثال وجود فراغات تحت السطح ، نوضع القطعة المعدنية بين قطبي مغناطيس ويقاس المجال المغناطيسى على سطحها . وبدلالة اضطراب المجال المغناطيسى يطلب تعيين وجود العيب وكذلك إذا أمكن أبعاده وعمق امتداده وغير ذلك .

ولحل المسائل يستعان بطرق النمذجة المؤسسة على تشابه المجالات الجهدية ذات الطبيعة الفيزيائية المختلفة .

بالفعل لندرس المجالات الجهدية في الأوساط اللامتجانسة ذات الطبيعة الفيزيائية المختلفة (على سبيل المثال مجال درجات الحرارة المستقر، المجال المغناطيسي في وسط لامتجانس، المجال الكهروستاتيكي، مجال سرعات السائل عند عملية الترشيح). والدوال الجهدية لهذه المجالات $u(x, y, z)$ في كل منطقة متجانسة تحقق معادلة لابلاس $\Delta u = 0$. وعلى حدود المنطقتين G_1, G_2 بمعامل التوصيل الحرارى المختلفين أو بمعامل النفاذية للمغناطيسية المختلفين وهكذا، يتحقق الشرط

$$k_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n},$$

حيث k_1, k_2 الثابتان الفيزيائيان المناظران.

نفرض أنه على حدود المناطق الهندسية المتساوية معطاة قيم الجهود المتساوية عددياً - أو قيم مشتقاتها العمودية المتساوية عددياً - للمجالات الفيزيائية المختلفة. نفرض أن اللامتجانسات الفيزيائية لهذه المناطق متساوية هندسياً وموزعة بطريقة واحدة وأن النسب بين الثابتين الفيزيائيين (معامل التوصيل الحرارى، النفاذية المغناطيسية ...) لأى زوج من اللامتجانسات المناظرة تكون متساوية. عندئذ تكون القيم العددية لجهود هذه المجالات في النقط اللاخالية المناظرة أيضاً متساوية لأنها تعتبر حلاً لنفس المسألة الرياضية التى لها حل وحيد.

ملحق ٤ - تعيين المجالات الاتجاهية

في كثير من مسائل الكهروديناميكا والهيدروديناميكا تقابلنا كثيراً بالإضافة إلى المسائل المقياسية مسائل تعيين المجال الاتجاهى بدلالة دوران وتباعد هذا المجال. نثبت أن المجال الاتجاهى A معرف تعريفاً أحادى القيمة داخل منطقة ما G محدودة بسطح مغلق S إذا أعطى دوران وتباعد المجال داخل G :

$$\text{rot } A = B, \quad (1)$$

$$\text{div } A = C, \quad (2)$$

وعلى الحدود S معطاة المركبة العمودية للمتجه A

$$A_n|_S = f(M). \quad (3)$$

ونشير إلى أن الدوال f, C, B لا يمكن إعطاؤها اختياريًا فيجب تحقق العلاقتين :

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (4)$$

$$\int_S \int f(M) dS = \int_G \int \int C d\tau. \quad (5)$$

وسنعتبر الدالة f متصلة على السطح S ، والدالتين C, B متصلتين في G هما ومشتقاتهما ونعتبر السطح S سطحًا تكون له المسألة الحدية الداخلية بالقيم الحدية المتصلة قابلة للحل .

نحل المسألة المصاغة على عدة مراحل . نعين المتجه A_1 الذى يحقق الشروط

$$\operatorname{rot} A_1 = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} A_1 = C. \quad (7)$$

ومن العلاقة (6) يتبع أن

$$A_1 = \operatorname{grad} \varphi. \quad (8)$$

ويأخذ الدالة φ على الصورة

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_G \int \int \frac{C(Q)}{R_{PQ}} d\tau_Q. \quad (9)$$

نحقق المعادلة (7) أيضًا . والآن نعين المتجه A_2 بحيث يكون :

$$\operatorname{rot} A_2 = B, \quad (10)$$

$$\operatorname{div} A_2 = 0. \quad (11)$$

وبفرض أن

$$A_2 = \operatorname{rot} \psi, \quad (12)$$

نحقق الشرط (11) . بالتعويض بالفرض (12) في (10) نحصل على

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \psi - \Delta \psi = B. \quad (13)$$

ونطلب أن يكون

$$\operatorname{div} \psi = 0. \quad (14)$$

عندئذ تكون المعادلة (13) للمتجه Ψ على الصورة :

$$\Delta \Psi = -B. \quad (15)$$

ندرس المنطقة G_1 المحتوية كلية المنطقة G والمحدودة بالسطح S_1 .

نستكمل المتجه B في المنطقة $G_1 \rightarrow G$ ونطلب تحقق الشروط :

١ - المركبة العمودية B_n للمتجه B على حدود S متصلة (المتجه B نفسه يكون على وجه العموم منفصلاً) ، $B_{n1} = B_{n2}$ ،

$$، \quad S_1 \text{ على } B_n = 0 \quad (4') \quad (14')$$

$$، \quad G_1 - G \text{ في } \operatorname{div} B = 0 \quad (15) \quad (16)$$

ونبين كيفية تنفيذ استكمال B بهذه الصورة في المنطقة $G_1 - G$. نضع

$$، \quad G_1 - G \text{ في } B = \operatorname{grad} \chi$$

والشرط $\operatorname{div} B = 0$ يعطى

$$، \quad G_1 - G \text{ في } \Delta \chi = 0 \quad (17)$$

والشروط الحدية وفقاً للمطلبين ١ ، ٢ تكون على الصورة :

$$، \quad S \text{ على } \frac{\partial \chi}{\partial n} = B_{n1} \quad (17')$$

$$، \quad S_1 \text{ على } \frac{\partial \chi}{\partial n} = 0 \quad (17'')$$

حيث B_{n1} القيمة النهائية للمركبة B_n على الناحية الداخلية للسطح S . وحصلنا للدالة χ على المسألة الثانية (17'') - (17). والشرط اللازم لقابلية هذه المسألة للحل وهو

$$\int \int_{S+S_1} \frac{\partial \chi}{\partial n} dS = \int \int_S B_n dS = 0$$

يتحقق لأن

$$\int \int_S B_n dS = \int \int \int_G \operatorname{div} B d\tau = 0.$$

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{G_1} \int \frac{B(Q)}{R_{PQ}} d\tau_Q,$$

$$P = P(x, y, z), Q = Q(\xi, \eta, \zeta), R_{PQ} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

نحقق كما هو واضح المعادلة (15).

ولا يصعب التأكد من أن الشرط (14) يتحقق أيضًا. فبالفعل نحسب المشتقات

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial z}.$$

وبالتعبير عن التكامل المأخوذ على المنطقة G_1 في صورة مجموع تكاملين مأخوذين على G وعلى $G_1 - G$ والأخذ في الاعتبار العلاقة

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \int \int \frac{B_x}{R} d\tau = \int \int \int B_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau = - \int \int \int B_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau,$$

نحصل بعد التكامل بالتجزئة على :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \int \int \frac{B_x}{R} d\tau = \int \int \int \frac{\partial B_x}{\partial \xi} \frac{1}{R} d\tau - \int \int B_{x1} \frac{\cos \alpha}{R} dS,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \int \int \frac{B_x}{R} d\tau = \int \int \int \frac{\partial B_x}{\partial \xi} \frac{1}{R} d\tau + \int \int B_{x2} \frac{\cos \alpha}{R} dS - \int \int B_x \frac{\cos \alpha_1}{R} dS,$$

حيث $\cos \alpha_1 = \cos(n, x)$ و $\cos \alpha = \cos(n, \xi)$ ، اتجاه العمود الخارجى على السطح .

ونحصل للمشتقة $\frac{\partial \psi_x}{\partial x}$ على :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = & \frac{1}{4\pi} \int \int \int \frac{\partial B_x}{\partial \xi} \frac{1}{R} d\tau + \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{B_{x2} - B_{x1}}{R} \cos \alpha dS - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int \int B_x \frac{\cos \alpha_1}{R} dS. \end{aligned}$$

وتتحقق صيغتان مائلتان للمشتقتين

$$\frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi_z}{\partial z}.$$

ومن هنا ينتج أن :

$$\operatorname{div} \psi = \frac{1}{4\pi} \int_{G_1} \int \int \frac{\operatorname{div} B}{R} d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \int \frac{B_n}{R} dS + \frac{1}{4\pi} \int_S \int \frac{B_{ne} - B_{ni}}{R} dS.$$

ووفقاً للشروط (16), (4'), (4) وكذلك شرط اتصال المركبات العمودية للمتجه B على S ($B_{ni} = B_{ne}$) فإن المتجه A_2 المعرف بالعلاقة (12) سيحقق المعادلة (10) إذا كان المتجه ψ يحقق الشرطين (15) , (14).

ومن الواضح أن المتجه $A_1 + A_2$ يحقق الشرطين :

$$\operatorname{rot} (A_1 + A_2) = B, \quad (18)$$

$$\operatorname{div} (A_1 + A_2) = C. \quad (19)$$

ولتعيين المتجه A يتبقى أن نحقق الشرط (3). ولهذا الغرض نعين المتجه A_3 الذى يحقق داخل G الشروط :

$$\operatorname{rot} A_3 = 0, \quad (20)$$

$$\operatorname{div} A_3 = 0, \quad (21)$$

وعلى S

$$A_{3nl} s = f(M) - A_{1nl} s - A_{2nl} s = f^*(M). \quad (22)$$

ومن الواضح أن الدالة $f^*(M)$ معرفة. تعريفاً أحادى القيمة . ومن المعادلة (20) ينتج أن

$$A_3 = \operatorname{grad} \theta.$$

بالتعويض بقيمة A_3 هذه فى المعادلة (21) نحصل داخل G على :

$$\Delta \theta = 0; \quad (23)$$

ويعطى الشرط (22) أن

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_S = f^*(M), \quad (24)$$

أى لتعيين الدالة θ نحصل على المسألة الحدية الثانية . ولذا يتحدد المتجه A_3 تحديداً أحادى القيمة .

وبذلك أثبتنا أن المسألة (3) - (1) لها حل وحيد

$$A = A_1 + A_2 + A_3.$$

ملحق 5 - تطبيق طريقة التحويلات المطابقة في الكهروستاتيكا

١ - لحل مسائل الكهروستاتيكا الثنائية الأبعاد كثيراً ما يستعان بنظرية الدوال في المتغير المركب. ندرس على سبيل المثال مسألة الكهروستاتيكا التالية :

عين المجال الكهربائي لعدة موصلات مشحونة جهودها تساوى u_1, u_2, \dots . وتؤول مثل هذه المسألة كما نعلم (انظر الملحق ٢) إلى المعادلة :

$$\Delta u = 0 \quad (1)$$

بالشروط الحدية

$$u|_{S_i} = u_i, \quad (2)$$

حيث S_i ترمز إلى سطح الموصل رقم i . وإذا أمكن اعتبار المجال مستوياً لا يتغير على مسيل المثال على امتداد المحور z فإن المعادلة (1) والشروط الحدية تأخذ الصورة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$

$$u|_{C_i} = u_i, \quad (4)$$

حيث C_i المحيط الذي يحده المنطقة S_i .

سنبحث عن الجهد u بوصفه الجزء التخيلي للالة تحليلية ما

$$f(z) = v(x, y) + iu(x, y) \quad (z = x + iy), \quad (5)$$

علماً بأنه وفقاً لشروط كوشي - ريمان يكون :

$$v_x = u_y, \quad v_y = -u_x \quad (6)$$

و

$$v_x v_y + u_x u_y = 0. \quad (7)$$

ومن الشرط الحدى (4) ينتج أن الدالة $f(z)$ لها جزء تخيل ثابت على المنحنيات C ،
التي تحد الموصلات محل الدراسة .

وبالرجوع إلى الشرط (6) نلاحظ أن

$$v(x, y) = \text{const} \quad (8)$$

هى عبارة عن عائلة خطوط (منحنيات) القوى* فى حين أن المعادلة

$$u(x, y) = \text{const} \quad (9)$$

تحدد وفقاً للشرط (7) عائلة الخطوط المتساوية الجهد (equipotential lines) .

وبذلك فلحل المسألة المصوغة يكفى تعيين التحويل المطابق (أو التشاكلى)

(conformal transformation)

$$w = f(z),$$

الذى يحول مستوى المتغير المركب

$$z = x + iy$$

إلى المستوى

$$w = v + iu,$$

وبواسطته تتحول حدود الموصلات إلى المستقيمات

$$u = \text{const}$$

أو

$$\text{Im } w = \text{const}.$$

وإذا عُلِّمت مثل هذه الدالة $w = f(z)$ فإن الجهد المطلوب تعيينه يعين

بالعلاقة :

$$u = u(x, y) = \text{Im } f(z).$$

* بالفعل لمعادلة خطوط القوى تكون على الصورة $\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$. وبالتعويض عن u_x ، u_y من

الشرط (6) بالقيمتين v_x ، $-v_y$ نحصل على $dv = 0$ أو $v_x dx + v_y dy = \text{const}$.

ومعرفة الجهد يمكن حساب المجال الكهربائي

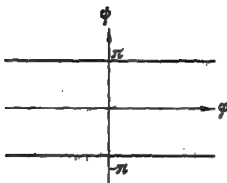
$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (10)$$

وكثافة الشحنات السطحية في وحدة الطول على المحور z :

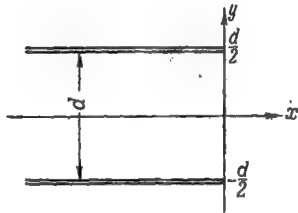
$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2},$$

التي تكون وفقًا لشروط كوشي - ريمان مساوية

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} |f'(z)|. \quad (11)$$



شكل ٦٩



شكل ٦٨

٢ - مجال المكثف المستوي نصف اللانهائي . نعين مجال المكثف المتكون من لوحين معدنيين $y = d/2$, $y = -d/2$ سمك كل منهما متناه في الصغر ويمتدان في المنطقة $x < 0$. ودون أن نتوقف عند استنباط التحويل المطابق الذي يحول المنطقة المبينة على الرسم بشكل ٦٨ إلى الطبقة $|\text{Im } w| \leq \pi$ سنطبقه مباشرة على حل المسألة المذكورة .

التحويل

$$z = \frac{d}{2\pi} (w + e^w) \quad (w = \varphi + i\psi) \quad (12)$$

يحول المستوى $z = x + iy$ بالقطعين $(y = \pm d/2, x < 0)$ إلى الطبقة $|\psi| \leq \pi$ (الشرط) على المستوى $w = \varphi + i\psi$ (شكل ٦٩) . وبمناوبة الجهد المركب نختار الحالة

$$\frac{u_0}{2\pi} w,$$

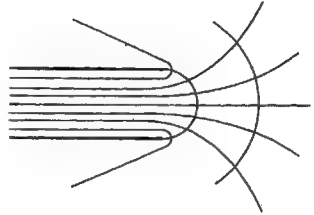
(13)

حيث u_0 ترمز إلى فرق الجهد بين لوحى المكثف ، ومن ثم فإن جهد المجال الكهربائى يعبر عنه بالدالة

$$u(x, y) = \frac{u_0}{2\pi} \psi, \quad (14)$$

حيث ψ ترتبط بالمتغيرين x, y بالعلاقين

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{d}{2\pi} (\varphi + e^{\psi} \cos \psi), \\ y &= \frac{d}{2\pi} (\psi + e^{\psi} \sin \psi). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$



شكل ٧٠

وتبين على شكل ٧٠ خطوط القوى وخطوط تساوى الجهد للمكثف المستوى نصف اللانهائى .

ننتقل إلى بحث المجال بالقرب من حافة المكثف .

يتضح من العلاقة (15) أنه عندما $\varphi \rightarrow -\infty$ يكون

$$x \approx \frac{d}{2\pi} \varphi, \quad y \approx \frac{d}{2\pi} \psi, \quad (16)$$

أى أن المجال داخل المكثف بعيداً عن حوافه يكون مستويًا . وعندما $\varphi \rightarrow \infty$ يكون

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \approx \frac{d}{2\pi} e^{\psi}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \approx \psi, \quad (17)$$

أى أن خطوط تساوى الجهد تكون خارج المكثف على مسافات كبيرة من حوافه عبارة عن دوائر .

وإذا أخذنا بدلاً من w الجهد المركب $f = \frac{u_0}{2\pi} w$ بحيث إن $w = \frac{2\pi}{u_0} f$ فإن العلاقة بين z و $f(z)$ ستعطى بالمعادلة

$$z = d \left(\frac{f}{u_0} + \frac{1}{2\pi} e^{\frac{2\pi f}{u_0}} \right),$$

ومن هنا ينتج :

$$\frac{dz}{df} = \frac{d}{u_0} \left(1 + e^{\frac{2\pi i}{u_0}} \right).$$

وعندما $f = \frac{u_0}{2\pi} (\varphi \pm \pi i)$ نحصل على :

$$f'(z) = \frac{u_0}{d(1 - e^\varphi)} \quad \text{أو} \quad \frac{dz}{df} = \frac{d}{u_0} (1 - e^\varphi)$$

بوضع $u_0 = 1$ نحصل لكثافة الشحنات σ وفقاً للعلاقة (11) على القيمة التالية :

$$\sigma = \frac{|f'(z)|}{4\pi} = \frac{1}{4\pi d |1 - e^\varphi|}. \quad (18)$$

ومن هنا ينتج أنه عندما $\varphi \rightarrow -\infty$ يكون $\sigma \approx 1/4\pi d$ ، وعندما $\varphi \rightarrow +\infty$ يكون $\sigma \approx 1/4\pi d e^\varphi$ أى أنه في هذه الحالة تتناقص كثافة الشحنات على الناحية الخارجية للألواح مثل $1/\rho$.

ومن العلاقة (18) يتضح أنه عندما $\varphi = 0$ (على حافة المكثف) فإن $\sigma = \infty$. بالفعل يكون لحافة اللوح المستوى المنحني لانهاى ، ولشحنها حتى جهد ما من الضروري أن نضع عليها شحنة لانهاية.

إن دائرة المسائل التى يمكن حلها بطريقة التحويلات المطابقة (أو الانعكاسات المطابقة conformal mapping) واسعة للغاية. فبواسطة هذه الطريقة يمكن بنجاح حل مسألة تأثير حافة الجدار السميك للمكثف للمستوى وكثير من المسائل المتعلقة بتأثير النقى فى المكثف وغيرها. ويمكن أيضاً تطبيق التحويلات المطابقة لحساب المسائل الديناميكية. وعيب هذه الطريقة هو أن التحويلات المطابقة تستخدم أساساً للمسائل المستوية فقط التى تتحول إلى معادلة لابلاس الثنائية الأبعاد $\Delta u = 0$.

ملحق ٦ - تطبيق طريقة التحويلات المطابقة فى الهيدروديناميكا

١ - عند حل مسائل حركة الجسم الجاسئ فى سائل تلعب الشروط الحدية على سطح الجسم دوراً جوهرياً.

وفي حالة السائل المثالي يكون الشرط الحدي متحصراً في أن $v_n = 0$ - مسقط سرعة السائل على اتجاه العمودى على سطح الجسم - يجب أن تكون مساوية للمركبة العمودية لسرعة حركة الجسم .

وإذا كان الجسم غير متحرك فإن الشرط الحدي يأخذ الصورة المبسطة التالية :

$$v_n = 0$$

على سطح الجسم .

وإذا كانت الحركة جهدية (potential) (المجال محافظ) أى أن :

$$v = \text{grad } \phi,$$

فإن الشروط الحدية تأخذ الصورة التالية :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_s &= 0 \quad \text{في حالة الجسم غير المتحرك ,} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_s &= u_n \quad \text{في حالة الجسم المتحرك بسرعة } u. \end{aligned}$$

وكما نعلم من الهيدروديناميكا فإن جهد السرعات للسائل اللامضغوط (incompressible liquid) يحقق المعادلة

$$\Delta \phi = 0.$$

وبذلك فإن مسألة الانسياب الجهدى للجسم الجاسى بدفق سائل مثالي لامضغوط تؤول إلى حل معادلة لابلاس

$$\Delta \phi = 0$$

بالشروط الحدية الإضافية على سطح الجسم الانسيابي

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_s = u_n,$$

أى إلى حل المسألة الحدية الثانية لمعادلة لابلاس .

وإذا كانت الحركة محل الدراسة مستوية فإن حل المسألة يمكن الحصول عليه بواسطة نظرية الدوال في المتغير المركب .

في حالة الحركة المستوية للسائل اللامضغوط تعطى معادلة الاتصال ما يلي :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial (-v_y)}{\partial y} \quad (1)$$

نكتب معادلة خطوط التيار

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

على الصورة

$$v_x dy - v_y dx = 0 \quad (2)$$

وتستعين بالدالة ψ المعرفة بالعلاقين

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

وعندئذ ينتج من المعادلة (1) أن الطرف الأيسر للصيغة (2) يكون تفاضلاً تاماً للدالة ψ :

$$v_x dy - v_y dx = d\psi.$$

وعائلة المنحنيات الأحادية البارامتر

$$\psi(x, y) = C$$

هي عبارة عن خطوط التيار للسائل اللانضغط:

وإذا وجد جهد السرعات فإن للتساوية $\text{rot } v = 0$ تكون مكافئة للمعادلة

$$\Delta \psi = 0.$$

ومن صيغتي v_x, v_y ينتج أن:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

أي أن الدالتين ψ, φ تحققان شروط كوشي-ريمان. وبالتالي فإن الدالة في المتغير المركب

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

تكون دالة تحليلية.

وهكذا فكل حركة مستوية جهدية للسائل تناظرها دالة تحليلية معينة في المتغير المركب وبالعكس كل دالة تحليلية ترتبط بصورة كينماتيكية معينة لحركة السائل (بدقة أكثر ترتبط بصورتين لأنه يمكن استبدال دورى الدالتين ψ, φ)

ندرس أمثلة معينة على تطبيق نظرية الدوال التحليلية لحل مسائل انسياب الأجسام في دفق مستو لسائل .

٢ - انسياب أسطوانة دائرية . نفرض أنه على أسطوانة دائرية نصف قطرها $r = a$ ينساب دفق مستو لسائل له في المالا نهاية سرعة ثابتة u . وفي حالة الحركة المستقرة يمكن قلب المسألة ودراسة حركة الأسطوانة ذات السرعة الثابتة u بالنسبة إلى السائل .

نربط بالأسطوانة مجموعة إحداثيات غير متحركة ونمد المحور Ox موازيًا لسرعة حركة الأسطوانة ..

وعلى سطح الجسم المتحرك في السائل يتحقق الشرط الحدى :

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = u \frac{\partial y}{\partial s},$$

حيث ds عنصر طول القوس على المنحنى الذى يحد الجسم .
وفي حالة الحركة الانتقالية بالسرعة u يمكن تكامل هذا الشرط على سطح الجسم . ونحصل على :

$$\psi = uy + C$$

على سطح الجسم .

وهكذا آلت مسألتنا إلى دراسة للمعادلة

$$\Delta \psi = 0$$

بالشروط الحدية :

$$١ - \psi = uy + C \text{ على سطح الأسطوانة ؛}$$

$$٢ - \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ و } \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ تتولان إلى الصفر في المالا نهاية .}$$

والشرط الأخير يعنى أن الدالة

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - i v_y$$

تكون خارج الدائرة C دالة تحليلية أحادية القيمة تتحول إلى الصفر في النقطة البعيدة بعداً لانهائياً. وهذا يكفل التعبير عن الدالة w في الصورة

$$w = C_1 \ln z - \frac{C_2}{z} - \frac{C_3}{z^2} + \dots$$

بوضع

$$C_k = A_k + iB_k,$$

نعين الثوابت A_k, B_k من الشرط الحدى :

$$\psi = u a \sin \theta + C,$$

وذلك بالانتقال إلى الإحداثيات القطبية $z = a e^{i\theta}$.

ونحصل للثوابت على الصيغ التالية :

$$A_1 = 0; \quad A_2 = u a^2; \quad B_2 = 0; \quad A_3 = B_3 = 0;$$

$$B_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}.$$

ومن هنا

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - u \frac{a^2}{z};$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - u \cos \theta \frac{a^2}{r};$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + u \sin \theta \frac{a^2}{r}.$$

والحد الأول في صيغة w يعبر عن دوران (circulation) الشدة Γ حول الأسطوانة.

وفي الحالة المبسطة عند انعدام الدوران نحصل على

$$w = -u \frac{a^2}{z}.$$

والجهد المركب للدفق الذى ينساب حول أسطوانة غير متحركة وسرعته في المالا نهاية u

يكون على الصورة :

$$w = uz + \frac{u a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

٣- انسياب اللوح. تكفل النتائج التى حصلنا عليها لانسياب الأسطوانة

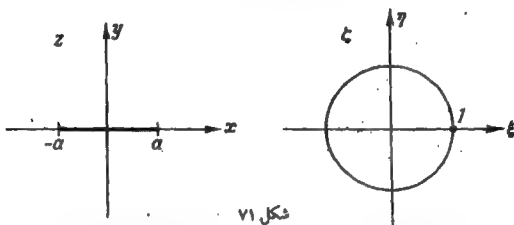
الدائرية حل مسألة انسياب أية محيطات اختيارية. وعند ذلك تطبق طريقة

التحويلات المطابقة. ندرس تطبيق هذه الطريقة على مثال محدد هو انسياب اللوح.

نفرض أنه على لوح متناهي الطول عرضه $2a$ وواقع على المحور Ox (شكل ٧١) ينساب دفق مستو ثابت سرعته في المالاتهية لها المركبتان u , v . بواسطة الدالة التحليلية

$$z = \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = f(\zeta)$$

يمكن إحداث التناظر الأحادي القيمة المتبادل بين المنطقة خارج اللوح على



شكل ٧١

المستوى z والمنطقة خارج دائرة نصف قطرها الواحد الصحيح على المستوى ζ . وعند ذلك فالنقطة $z = \infty$ تناظر النقطة $\zeta = \infty$ و

$$\text{عندما } \zeta = \infty, \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{a}{2} > 0$$

لتركيب بتغير الشرط في المالاتهية. للجهد المركب

$$w(z) = \varphi + i\psi$$

يكون لدينا

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{\infty} = u - iv = v_{\infty}$$

وهي القيمة المرافقة للسرعة المركبة.

نعين قيمة السرعة المركبة للتيار اللاحقي (التصوري) على المستوى ζ :

$$w(\zeta) = w[f^{-1}(z)]; \quad \frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta}$$

ومن هنا

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty} = k\bar{v}_{\infty} \quad \left(k = \frac{a}{2}\right).$$

وهكذا فالتيار اللاحقنى هو عبارة عن انسياب أسطوانة نصف قطرها الواحد الصحيح بدفق له فى المالا نهاية سرعة مركبة kv_{∞} . ولهذا الحركة يكون الجهد المركب على الصورة :

$$w(\zeta) = k\bar{v}_{\infty}\zeta + \frac{k\bar{v}_{\infty}}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta.$$

ومن العلاقة $z = f(\zeta)$ يتج أن

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}; \quad \frac{1}{\zeta} = \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{a}.$$

وبالاستعانة بهذه العلاقات نحصل للجهد المركب للسائل المنساب حول اللوح على الصيغة :

$$w(z) = uz - i\alpha \sqrt{z^2 - a^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right).$$

وفى حالة انعدام الدوران تأخذ هذه الصيغة الصورة :

$$w(z) = uz - i\alpha \sqrt{z^2 - a^2}.$$

ويتضح من العلاقات الناتجة أن السرعة على أطراف اللوح تصل إلى قيم كبيرة كبراً لانهائياً. ولا يتحقق ذلك بالطبع فى الظروف الحقيقية. وتفسر نتائجنا بأننا نعتبر السائل مثاليًا. وتطبيق نظرية برنولى يمكن تعيين صيغة القوة المؤثرة على الجسم الذى ينساب حوله السائل.

وتهم نظرية الجناح فى الديناميكا الهوائية بدراسة القوى التى يؤثر بها الهواء على جناح الطائرة المتحركة فيه. وفى تطوير هذه النظرية قام بالدور الأكبر العلماء الروسون والسوفييت وبالدرجة الأولى ن. چوكوفسكى وس. تشابليجين. وفى الحالة المسطرة عند الانسياب اللادوراني للأسطوانة بواسطة دفق مستو لسائل ما نحصل على نتيجة غير متوقعة وهى أن الدفق لا يؤثر بأى تأثير على الأسطوانة. وفى حالة تراكب دوران السرعة حول الأسطوانة على الدفق الانتقالي تنشأ قوة تؤثر

على الأسطوانة عمودياً على اتجاه سرعة الدفع في الملائهية .

ونظرية الدوال التحليلية يمكن أن تستخدم في حالة الحركة المستوية فقط . وفي حالة الفراغ الثلاثي الأبعاد نضطر إلى اللجوء إلى طرق أخرى لحل مسائل انسياب السائل حول الجسم الجاسئ . وفي الحالة العامة يكون حل المسألة على جانب كبير من الصعوبة . لندرس حالة مبسطة هي حركة كرة بسرعة ثابتة في سائل ساكن لا محدود . وتتحصر المسألة في حل المعادلة

$$\Delta \varphi = 0$$

خارج الكرة بالشرط الحدى

$$\text{على سطح الكرة} \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{r=a} = u \cos \theta$$

$$\text{في الملائهية} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

نبحث عن الحل في الصورة

$$\varphi = A \frac{\cos \theta}{r^3}.$$

وبالاستعانة بالشرط الحدى نحصل على :

$$\varphi = -\frac{ua^3}{2r^3} \cos \theta.$$

وهو ما يعطى حل المسألة المصاغة .

وفي كل الحالات التي درسناها اعتبرنا السائل مثاليًا . وللسائل اللزج تتغير الشروط الحدية . فعلى سطح الجسم يجب تحقق شرط الالتصاق وهو على وجه التحديد أنه في نقط الحدود الصلبة تكون سرعة السائل منطبقة في المقدار والاتجاه على سرعة النقطة المناظرة للحدود .

وتؤدى مسائل انسياب الأجسام بالسائل اللزج إلى صعوبات رياضية جمة . وقد لعبت نظريات الطبقة المتاخمة دوراً كبيراً في تطوير هذا الفرع من الهيدروديناميكا .

ملحق ٧ - المعادلة المزدوجة التوافقية

حصلنا في الملحق ٢ بالباب الثاني على معادلة الذبذبات المستعرضة للقضيب

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (1)$$

ومسألة ذبذبات لوح رقيق حر من الأحمال ومثبت عند طرفيه تتحول أيضاً إلى معادلة مشابهة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \Delta \Delta u = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = 0 \quad (2)$$

والشرطين الحديين

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{على الحدود.} \quad (3)$$

وعلاوة على ذلك فإن الدالة u يجب أن تحقق الشرطين الابتدائيين :

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y). \quad (4)$$

وإذا أثرت على اللوح قوة خارجية موزعة بالكثافة $f(x, y)$ فإن الانحناء الاستاتيكي للوح المثبت عند طرفيه سيتحدد بالمعادلة

$$\Delta \Delta u = f \quad (5)$$

بالشرطين الحديين

$$u = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (3)$$

والمعادلة

$$\Delta \Delta u = 0 \quad (5')$$

تسمى بالمعادلة المزدوجة التوافقية (biharmonic equation) وحلولها التي لها مشتقات حتى الرتبة الرابعة بما في ذلك مشتقات الرتبة الرابعة تسمى بالدوال المزدوجة التوافقية (biharmonic functions).

والمسألة الحدية الأساسية للمعادلة المزدوجة التوافقية تصاغ كما يلي :

عين الدالة $u(x, y)$ المتصلة هي ومشتقتها الأولى في المنطقة المغلقة $S + C$ والتي لها مشتقات حتى الرتبة الرابعة في S وتحقق المعادلة (5) أو (5') داخل S والشروط الحدية على C

$$u|_C = g(s); \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_C = h(s), \quad (6)$$

حيث $g(s)$, $h(s)$ دالتان متصلتان في طول القوس s . وعند حل المسألة السابق صياغتها (4) — (2) بالشروط الابتدائية بطريقة فصل المتغيرات يعرض كالعادة أن

$$u(x, y, t) = \bar{v}(x, y) T(t). \quad (7)$$

وبالتعويض عن هذه الصيغة في المعادلة (2) وفصل المتغيرات نصل إلى مسألة البحث عن القيم الذاتية للمعادلة

$$\Delta \Delta v - \lambda v = 0 \quad (8)$$

بالشروط الحدية

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{على } C. \quad (9)$$

١ - وحدانية الحل. نثبت أن المعادلة المزدوجة التوافقية

$$\Delta \Delta u = 0$$

بالشروط الحدية

$$u|_C = g(s), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_C = h(s) \quad (3')$$

يكون لها حل وحيد.

نفرض أنه يوجد حلان u_1 , u_2 . ندرس الفرق بينها

$$v = u_1 - u_2.$$

والدالة v تحقق المعادلة المزدوجة التوافقية (5') والشروط الحدية المتجانسة

$$v|_C = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_C = 0.$$

و بتطبيق علاقة جرين

$$\int_0 (\Delta \varphi \cdot \psi - \varphi \Delta \psi) dS = \int_0 \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds.$$

على الدالتين $\varphi = v$, $\psi = \Delta v$ نحصل على :

$$\int_0 (\Delta v)^2 dS = 0,$$

ومن هنا

$$\Delta v = 0.$$

وبالأخذ في الاعتبار أن $v|_0 = 0$ نحصل على

$$v = 0, \quad u_1 = u_2.$$

وبالتالى فالدالة للزوجية التوافقية تتحدد تحديداً أحادى القيمة بالشروط الحدية (3').

٢- التعبير عن الدوال المزدوجة التوافقية بدلالة الدوال التوافقية. ثبت النظرية التالية :

إذا كانت u_1, u_2 دالتين توافقيتين في منطقة ما G فإن الدالة $u = xu_1 + u_2$ تكون دالة مزدوجة التوافقية في المنطقة G .

للإثبات نستعين بالمتطابقة

$$\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right). \quad (10)$$

بفرض

$$\varphi = x, \quad \psi = u_1,$$

نعين

$$\Delta(xu_1) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x}. \quad (11)$$

وبتطبيق المؤثر Δ (مؤثر لابلاس) مرة أخرى والأخذ في الاعتبار أن $\Delta\Delta u_2 = 0$ نحصل على :

$$\Delta\Delta(xu_1 + u_2) = 0.$$

وإذا كانت المنطقة G هي بحيث لا يقطع حدودها أى مستقيم مواز للمحور x في أكثر من نقطتين فإن النظرية العكسية تكون صحيحة :

لأية دالة مزدوجة التوافقية معطاة في المنطقة G توجد الدالتان التوافقيتان u_1, u_2 بحيث يكون

$$u = xu_1 + u_2.$$

ومن الواضح أنه يكفى لإثبات هذه النظرية أن نثبت إمكانية اختيار الدالة u_1 التي تحقق الشرطين :

$$\Delta u_1 = 0, \quad (12)$$

$$\Delta(u - xu_1) = 0. \quad (13)$$

ومن الشرط (13) والعلاقة (11) يتبع أن

$$\Delta u = \Delta(xu_1) = 2 \frac{\partial u_1}{\partial x}. \quad (14)$$

وتحقق المعادلة (14) الدالة

$$\bar{u}_1(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{1}{2} \Delta u(\xi, y) d\xi.$$

وحيث إن

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \bar{u}_1 = \Delta \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}_1 = \frac{1}{2} \Delta \Delta u = 0,$$

فإن $\Delta \bar{u}_1$ تعتمد فقط على y :

$$\Delta \bar{u}_1 = v(y).$$

نعرف الدالة $\bar{\bar{u}}_1(y)$ بحيث يكون

$$\Delta \bar{\bar{u}}_1 = \frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}_1}{\partial y^2} = -v(y),$$

ونضع $u_1 = \bar{u}_1 + \bar{\bar{u}}_1$. وهذه الدالة - كما هو واضح - ستحقق الشرطين (12) و (13).

لندرس صورة أخرى للتعبير عن الدوال المزدوجة التوافقية . نفرض أن نقطة أصل الإحداثيات قد اختيرت داخل المنطقة G وأن أى شعاع خارج من نقطة الأصل يقطع حدود المنطقة G في نقطة واحدة فقط . عندئذ يمكن التعبير عن أية دالة مزدوجة التوافقية u في G بواسطة الدالتين التوافقيتين u_1 . u_2 في الصورة :

$$u = (r^2 - r_0^2) u_1 + u_2. \quad (15)$$

وهنا $r^2 = x^2 + y^2$. r_0 ثابت معطى .

وهذه النظرية تثبت كالنظرية السابقة بواسطة المتطابقة (10) والعلاقتين

$$\Delta r^2 = 4; \quad \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}.$$

٣- حل المعادلة المزدوجة التوافقية للدائرة . ندرس دائرة نصف قطرها r_0 ومركزها في نقطة الأصل . ونبحث عن الدالة المزدوجة التوافقية التي تحقق عند $r = r_0$ الشروط الحدية (6) . وكما أسلفنا يمكن التعبير عن الدالة المطلوب تعيينها في صورة المجموع

$$u = (r^2 - r_0^2) u_1 + u_2. \quad (15)$$

حيث u_1 . u_2 دالتان توافقيتان . ومن الشروط الحدية نجد أن

$$u_2|_{r=r_0} = g. \quad (16)$$

ومن هنا يتضح أن u_2 هي حل المسألة الحدية الأولى لمعادلة لابلاس ويمكن التعبير عنها بواسطة تكامل بواسون

$$u_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2) g \, d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)}. \quad (17)$$

ومن الشرط الحدى الثانى نحصل على

$$2r_0 u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = h. \quad (18)$$

ولا يصعب التأكد بعملية التفاضل مباشرة من أن الدالة

$$2r_0 u_1 + \frac{r}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial r} \quad (19)$$

تحقق معادلة لابلاس ولنا يمكن التعبير عنها بتكامل بواسون :

$$2r_0 u_1 + \frac{r}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2) h d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)}. \quad (20)$$

وبتفاضل (17) بالنسبة إلى r والتعويض بقيمة $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ في العلاقة (20) نعين u_1 .
وبالتعويض في العلاقة (15) بصيغتي u_1 ، u_2 الناتجتين نحصل على :

$$u = \frac{1}{2\pi r_0} (r^2 - r_0^2)^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{-h d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)} + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} \frac{-g [r_0 - r \cos(\alpha - \theta)] d\alpha}{[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)]^2} \right].$$

المحتويات

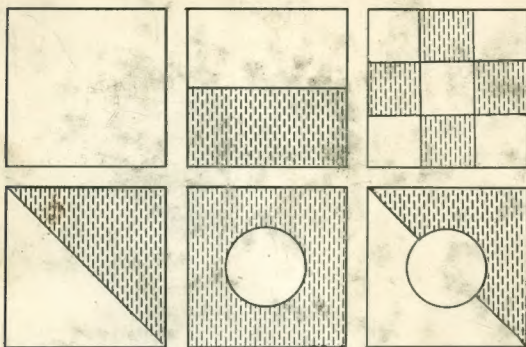
٥	مقدمة
٧	الباب الأول : تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية
٧	بند ١ - تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية
٢١	مسائل على الباب الأول
٢٢	الباب الثاني : المعادلات من النمط الزائدى
٢٢	بند ١ - أبسط المسائل الزودية إلى معادلات من النمط الزائدى . صياغة للمسائل المحددة
٥٥	بند ٢ - طريقة للموجات المتشرة
٩٦	بند ٣ - طريقة فصل المتغيرات
١٤٢	بند ٤ - للمسائل بالمعطيات على الميزان
١٥٠	بند ٥ - حل المعادلات الخطية العامة من النمط الزائدى
١٦٣	مسائل على الباب الثاني
	ملاحق الباب الثاني
١٦٤	ملحق ١ - حول ذبذبة أوتار الآلات الموسيقية
١٦٧	ملحق ٢ - حول ذبذبة القضبان
١٧٢	ملحق ٣ - ذبذبات الوتر المحمل
١٨٠	ملحق ٤ - معادلات ديناميكا الغازات ونظرية للموجات الصادمة (الانفجارات)
١٩٤	ملحق ٥ - ديناميكا امتصاص الغازات
٢٠٦	ملحق ٦ - التشابهات الفيزيائية
٢١١	الباب الثالث : المعادلات من النمط الكافى
٢١١	بند ١ - المسائل البسطة التى تؤدى إلى معادلات من النمط الكافى . صياغة للمسائل المحددة ..
٢٣٦	بند ٢ - طريقة فصل المتغيرات
٢٥٩	بند ٣ - مسائل على المستقيم اللانهائى
٢٨٢	بند ٤ - للمسائل بدون شروط ابتدائية
٢٨٧	مسائل على الباب الثالث
	ملاحق الباب الثالث
٢٨٩	ملحق ١ - موجات درجة الحرارة
٢٩٢	ملحق ٢ - تأثير الانقسام الإشعاعى على درجة حرارة القشرة الأرضية

٢٩٨	ملحق ٣ - طريقة التشابه في نظرية التوصيل الحرارى
٣٠٣	ملحق ٤ - مسألة على الانتقال الطورى
٣٠٨	ملحق ٥ - معادلة اينشتين - كولوجوروف
٣١٢	ملحق ٦ - دالة دلتا
٣٢٢	الباب الرابع : المعادلات على النمط الناقصى
٣٢٢	بند ١ - للمسائل التى تؤدى إلى معادلة لابلاس
٣٣٦	بند ٢ - الخواص العامة للنوال التوافقية
٣٦٤	بند ٣ - حل للمسائل الحدية للمناطق البسيطة بطريقة فصل المتغيرات
٣٧٥	بند ٤ - دالة المصدر
٣٨٨	بند ٥ - نظرية الجهد
٤٣٧	مسائل على الباب الرابع
	ملاحق الباب الرابع
٤٣٩	ملحق ١ - الصيغة التقاربية للجهد الحجمى
٤٤٣	ملحق ٢ - مسائل الكهروستاتيكا
٤٤٩	ملحق ٣ - للسألة الأساسية للاستكشاف الكهربائى
٤٥٦	ملحق ٤ - تعيين المجالات الاتجاهية
٤٦١	ملحق ٥ - تطبيق طريقة التحويلات للطاينة فى الكهروستاتيكا
٤٦٥	ملحق ٦ - تطبيق طريقة التحويلات للطاينة فى الهيدروديناميكا
٤٧٣	ملحق ٧ - للمعادلة للزوجة التوافقية

الأكاديمي أ. تيمخونوف عالم سوفيتي بارز في مجال الرياضيات والفيزياء. وإلى جانب نشاطه التعليمي بجامعة موسكو قام بدراسات وأبحاث علمية هامة ساهم بها في تطوير نظرية الفئات وبعض أقسام الفيزياء الرياضية. وله كذلك أعمال في الفيزياء وخاصة في نظرية انتشار المجالات الكهرومغناطيسية وتطبيقها على استكشاف مكامن الثروات الطبيعية.

الأكاديمي أ. سامارسكي رئيس قسم بمعهد الرياضيات التطبيقية التابع لأكاديمية العلوم السوفيتية. وكان على مدى سنين يقوم بالقاء محاضرات في الرياضيات بجامعة موسكو حيث ترقى على يده عدد من الباحثين العلميين الشباب. وله أكثر من ٢٠٠ بحث في الرياضيات النظرية والتطبيقية.

وقد منح كل من المؤلفين بعض الجوائز الحكومية تقديرا لأفضالهما في تطوير العلم.



محتويات الكتاب الأول

- تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية
- المعادلات من النمط الزائدى . ذبذبة الأوتار والقضبان . نظرية الموجات الصادمة .
- ديناميكا امتصاص الغازات
- المعادلات من النمط الكافى . موجات درجة الحرارة . دالة دلتا
- المعادلات من النمط الناقصى . مسائل الكهروستاتيكا . المعادلة المزدوجة

Bibliotheca Alexandrina



0642892